Université De Tlemcen

Département De Mathématiques

Faculté Des Sciences

Année Universitaire 2024/2025

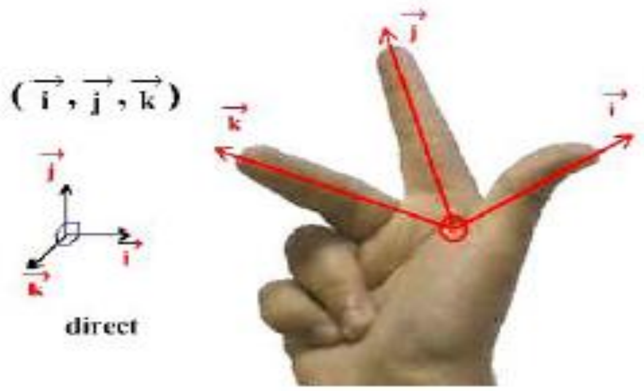
1ERE ANNEE LMD-M ET MI

COURS DE MECANIQUE

DU POINT MATERIEL

Chapitre II : Analyse vectorielle

Préparé par : Mme Hadjou Belaid Zakia



1. Introduction

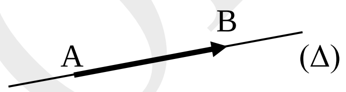
En physique, on utilise deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles :

-Grandeur scalaire ***المقدار السلمي***: définie par un nombre (un scalaire) et une unité appropriée comme : le volume, la masse, la température, le temps …
-Grandeur vectorielle ***المقدار الشعاعي***: c'est une quantité définie par un scalaire, une unité et une direction comme : Le vecteur de déplacement, la vitesse $\vec{v}$, le poids $\vec{p}$, le champ électrique …

2. Définition d'un vecteur

Un vecteur (شعاع) est un segment de droite orienté qui a les caractères suivants :

-Origine(المبدأ) : représente le point d'application « A»
-Support (الحامل): la droite qui porte le vecteur (Δ)
-Direction (الاتجاه) : c'est le sens du vecteur (de A vers B)



-Le module (الطويلة) : il donne la valeur algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = |\overrightarrow{AB}| = AB$$

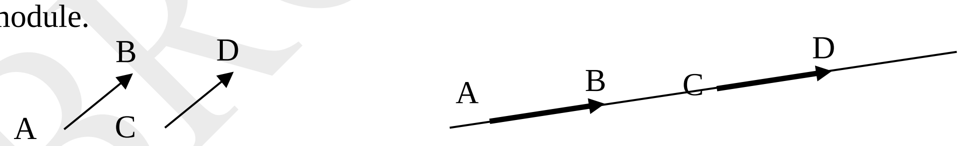
3. Propriétés

Vecteur libre : l'origine n'est pas fixe

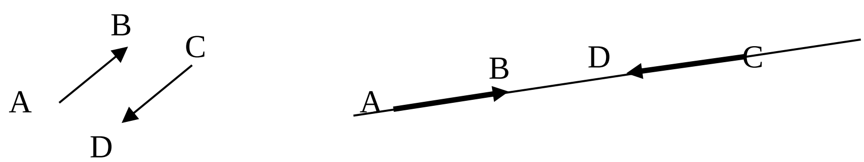
Vecteur glissant: le support est fixe par contre l'origine n'est pas fixe

Vecteur lié : l'origine est fixe

Vecteurs égaux : s'ils ont la même direction, le même support ou des supports parallèles et le même module.



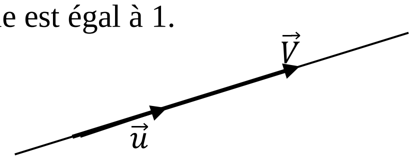
Vecteurs opposés : s'ils le même support ou des supports parallèles, le même module mais le sens (la direction) est opposés.



4. Vecteur unitaire شعاع الوحدة:

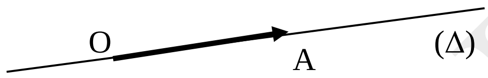
Un vecteur est dit unitaire si son module est égal à 1.

On écrit : $|\vec{u}|=1$ et $\vec{V} = |\vec{V}|\, \vec{u}$



5. Mesure algébrique :

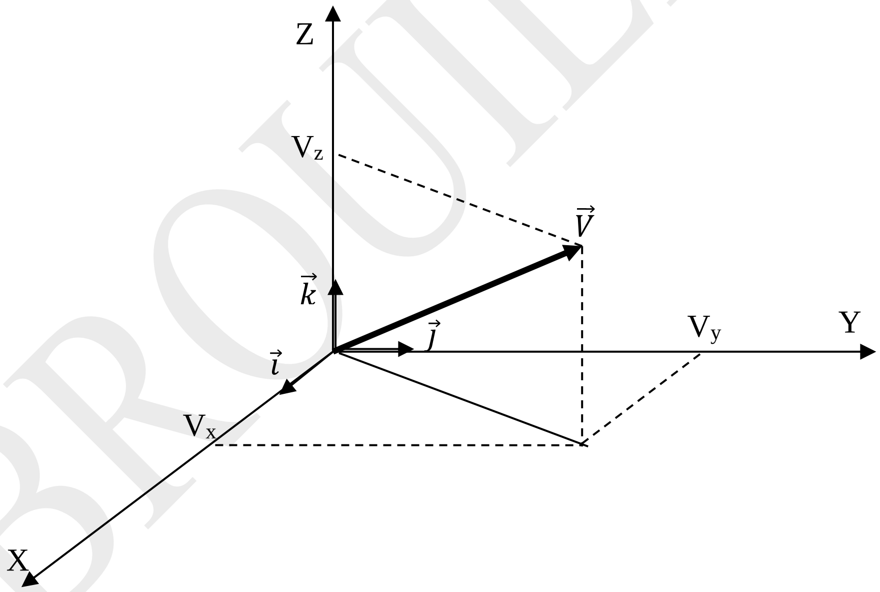
Soit un axe (Δ) portant les points O et A. O est l'origine, l'abscisse du point A est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$.



6. Composantes d'un vecteur :مركبات شعاع

Les coordonnées d'un vecteur dans l'espace, représenté dans un repère de base orthonormé R(O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) sont : V_x, V_y et V_z tel que :

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$



Le module du vecteur $\vec{V}$ est : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

En coordonnées cartésienne un vecteur s'écrit par:

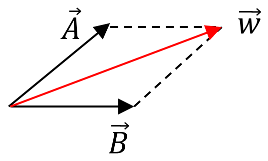
$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow V = \|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

7. Opérations élémentaires sur les vecteurs

7.1. Addition vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est $\vec{w}$, obtenue en utilisant le parallélogramme :

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{w}$$

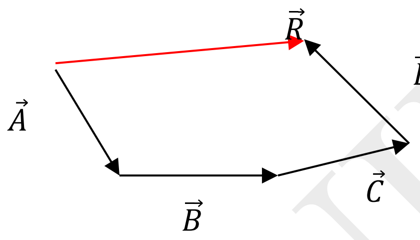


Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, $\vec{A}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ et $\vec{B}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$

$\vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ donc $\vec{A}+\vec{B}=\vec{w}=(x+x')\vec{\imath}+(y+y')\vec{\jmath}+(z+z')\vec{k}$

Remarque :

1. Pour plusieurs vecteurs : $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\vec{R}$



2. Propriétés :

$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$, $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$, $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

3. Relation de Charles :

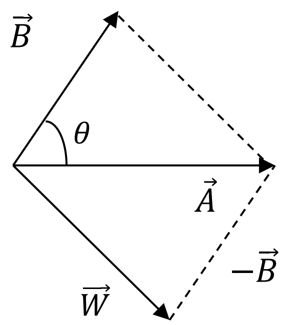
Soit les trois points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

7.2. La soustraction de deux vecteurs

C'est une opération anticommutative tel que : $\vec{W}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, $\vec{A}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ et $\vec{B}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$

$\vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ donc $\vec{A}-\vec{B}=\vec{w}=(x-x')\vec{\imath}+(y-y')\vec{\jmath}+(z-z')\vec{k}$



7.3. Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire α est le vecteur $\alpha\vec{v}$, ce vecteur a le même support que $\vec{v}$.

Les deux vecteurs ($\vec{v}$ et $\alpha\vec{v}$) ont le même sens si α>0 et ils sont des supports opposés si α<0 .

$$\alpha\vec{v} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha x\,\vec{\imath} + \alpha y\vec{\jmath} + \alpha z\vec{k}$$

Remarques : $[\alpha\vec{v}] = |\alpha||\vec{v}|$, $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ et $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

8. Produits

8.1. Produit scalaire الجداء السلمي

Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ faisant entre eux un angle θ, le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B} = m$ avec m est **un scalaire** tel que :

$$\boldsymbol{\vec{A}.\vec{B} = m = |\vec{A}|.|\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B})}$$

avec $\widehat{(\vec{A},\vec{B})} = \theta$

<u>Remarque</u> : les propriétés du produit scalaire sont :

- Le produit scalaire est commutatif $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- le produit scalaire est non associatif $\vec{V_1}.(\vec{V_2}.\vec{V_3})$, n'existe pas, car le résultat serait un vecteur.
- le produit scalaire est distributif.
- $\vec{A}.\vec{B} = 0$ $lorsque\ les\ deux\ vecteurs\ sont\ perpondiculaires$ $(\vec{A} \perp \vec{B})$.
- Si $\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\boldsymbol{\vec{A}.\vec{B} = x.x' + y.y' + z.z'}$**= un scalaire**

8.2. Produit vectoriel الجداء الشعاعي

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$ et s'écrit par:

$$\boldsymbol{\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}}$$

Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on aura :

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \boldsymbol{\vec{C}} = \textbf{un vecteur}$$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{\imath}(yz' - zy') - \vec{\jmath}(xz' - zx') + \vec{k}(xy' - yx') = \vec{\boldsymbol{C}}$

Donc le module du produit vectoriel peut étre donné par une autre méthode tel que :

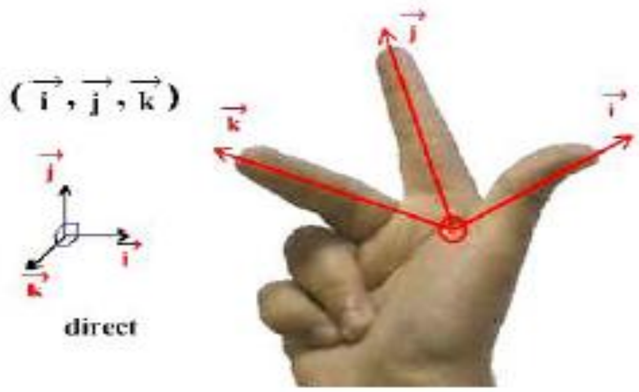
$$W = \sqrt{(yz' - zy')^2 + (xz' - zx')^2 + (xy' - yx')^2}$$

Les caractéristiques du vecteur $\vec{C}$:

Le support : $\vec{C}$ est perpondiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.

Le sens : les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ *et* $\vec{C}$ forment un trièdre direct.

Le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.



Le module : $|\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{B}| \sin(\vec{A}, \vec{B})$

Le module du produit vectoriel correspond à l'aire (la surface مساحة) du parallélogramme *(متوازي الاضلاع)* formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Exemple :

Dans une base orthonormée des coordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ Par contre $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$

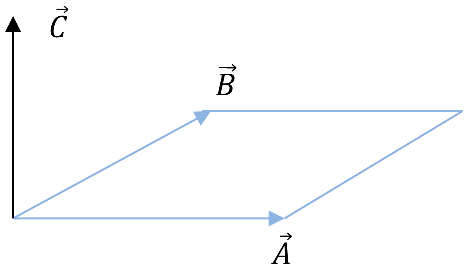
Remarques : Les propriétés du produit vectoriel sont :

- Le produit vectoriel n'est pas commutatif (Anticommutatif).
- Non associatif : $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) \neq (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3}$.
- Distributif par rapport à la somme vectorielle: $\vec{A} \wedge (\vec{B_1} + \vec{B_2}) = \vec{A} \wedge \vec{B_1} + \vec{A} \wedge \vec{B_2}$

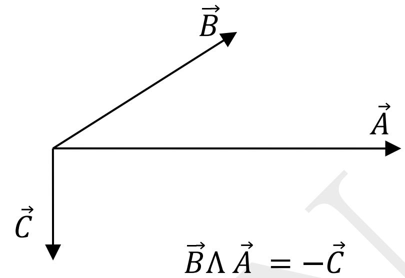
Mais :

$$\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) \neq (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) + (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_3})$$

- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \overrightarrow{A}$ car $sin(\vec{A},\vec{B}) = -sin(\vec{B},\vec{A})$



$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$



$\vec{B} \wedge \vec{A} = -\vec{C}$

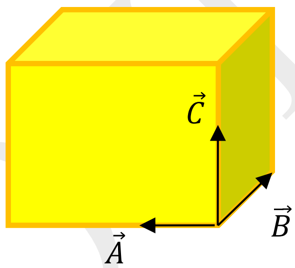
- $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ *lorsque les deux vecteurs sont parallèles* $(\vec{A} \parallel \vec{B})$

8 .3. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ *et* $\vec{C}$ une quantité scalaire **m** tel que :

$$m = (\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$$

Avec **m** représente le volume du parallélépipède (حجم متوازي المستطيلات) construit par les trois vecteurs :



Remarques : Le produit mixte est commutatif, $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$

9. Dérivé d'un vecteur

Soit le vecteur $\vec{A} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ qui varie en fonction du temps :

Sa première dérivé par rapport au temps est :

$$\overrightarrow{A'} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

La deuxième dérivée est :

$$\overrightarrow{A''} = \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Remarques :

- Dérivée d'un produit scalaire $\left(\vec{A}.\vec{B}\right)' = \overrightarrow{A'}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{B}$
- Si $\vec{B}$ est constant $\left(\vec{A}.\vec{B}\right)' = \overrightarrow{A'}.\vec{B}$
- $\left(\vec{A}^2\right)' = 0\ car\ \left(\vec{A}^2\right)' = 2\overrightarrow{A'}.\vec{A} = 0$
- Le vecteur dérivé est perpendiculaire au vecteur.
- Un vecteur s'écrit $\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\vec{u} = A\vec{u}$, si $\vec{u}$ est un vecteur variable alors $\vec{A}' = A'\vec{u} + A\overrightarrow{u'}$

References

1. C. J. Papachristou, Hellenic Naval Academy, Introduction to Mechanics of Particles and Systems. (ResearchGat, 2020).
2. A.I. Borisenko, I.E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, 1979).
3. M.D. Greenberg, *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition (Prentice-Hall, 1998).