Université De Tlemcen
Faculté Des Sciences

Année Universitaire 2024/2025
Département De Mathématiques

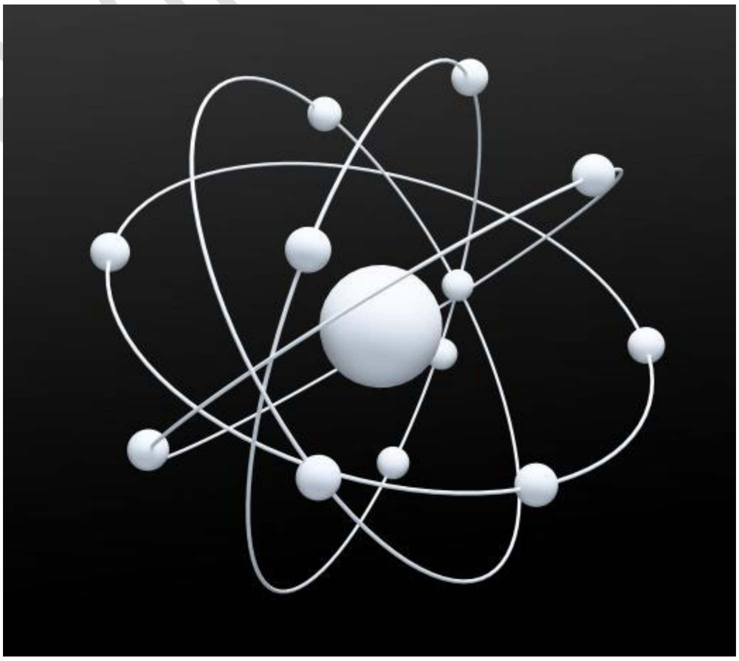
1^{ERE} ANNEE LMD- M ET MI

COURS DE MECANIQUE

DU POINT MATERIEL

Chapitre I : Analyse dimensionnelle et calcul d'incertitude

Préparé par : Mme Hadjou Belaid Zakia



Sommaire

1ère partie : Analyse dimensionnelle

1. Introduction

L’observation des phénomènes physiques est incomplète si elle n’aboutit pas à des informations quantitatives c'est-à-dire la mesure des grandeurs physiques.

Pour étudier un phénomène physique, il faut étudier les variables importantes, la relation mathématique entre ces variables constitue une loi physique. Cela est possible dans certains cas mais pour d’autre cas il faut utiliser une méthode de modélisation tel que *l’analyse dimensionnelle (التحليل البعدي)*

2. Définition de l’Analyse dimensionnelleالتحليل البعدي

C’est un outil théorique pour interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu: longueur, temps, masse…

L’analyse dimensionnelle permet de :

- Vérifier la validité des équations aux dimensions
- Recherche de la nature des grandeurs physiques
- Recherche de l’homogénéité des lois physiques
- Déterminer l’unité d’une grandeur physique en se basant sur les unités essentielles (mètre, seconde, kilogramme …)

3. Grandeurs physiques مقدار فيزيائي

Une grandeur physique est une propriété observable et mesurable par le biais d’un instrument conçu à cet effet. La Mécanique admet sept grandeurs physiques fondamentales : La longueur, le temps, la masse, le courant électrique, la température, la quantité du mouvement et l’intensité lumineuse. Les autres grandeurs physiques ; grandeurs dérivées ; s’écrivent en fonction de ces trois grandeurs fondamentales comme la vitesse, l’accélération, la force ….

Remarque :

En général on s'intéresse aux trois premières grandeurs fondamentales pour les étudiants en première année Mathématiques et Informatique (MI), Mathématiques (M) et Informatique (I): La longueur, le temps et la masse.

4. Système d'unités international الوحدة

La valeur d'une grandeur physique est donnée en fonction d'un étalon appelé « Unité ». Les quatre premières unités fondamentales forment le système international MKSA (Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère). A l'aide de ces unités fondamentales, on peut construire les unités dérivées : surface (m^2), vitesse ($m.s^{-1}$), force ($m.kg.s^{-2}$) etc…

Grandeurs fondamentales المقادير الأساسية	Unités الوحدة (dans le système international MKSA)	Symboles الرمز
Longueur	**Mètre**	**(m)**
Masse	**Kilogramme (kg)**	**(kg)**
Temps	**Seconde**	**(s)**
Intensité du courant	**Ampère**	**(A)**
Température	**Kelvin**	**(K)**
Intensité lumineuse	**Candela**	**(Cd)**
Quantité de la matière	**Mole**	**(mol)**

Il y a des unités particulières comme N (Newton) pour la force, Hz (Hertz) pour la fréquence, Watt pour la puissance, Pascal (Pas) pour la pression…

Remarque :

Il y a deux systèmes d'unités :

- Système international SI appelé MKSA (Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère), c'est le système le plus utilisé.
- Système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde), il est moins utilisé.

5. Equations aux dimensions

La dimension représente la nature d'une grandeur physique. Une grandeur physique n'a qu'une seul dimension possible.

La dimension d'une grandeur G est notée par $[\mathbf{G}] = \mathbf{L}$.

En désignant par M, L et T les dimensions des grandeurs fondamentales masse, longueur et temps. On peut exprimer les dimensions des autres grandeurs dérivées en fonction de ces trois dernières. Les équations ainsi obtenues sont les équations aux dimensions de ces grandeurs physiques.

Grandeurs fondamentales المقادير الأساسية	**Symboles الرمز**	**Dimensions الأبعاد**	**Unités الوحدة (dans le système international)**
Longueur	**l**	$[\mathbf{l}] = \mathbf{L}$	**Mètre (m)**
Masse	**m**	$[\mathbf{m}] = \mathbf{M}$	**Kilogramme (kg)**
Temps	**t**	$[\mathbf{t}] = \mathbf{T}$	**Seconde (s)**
Intensité du courant	**I**	$[\mathbf{I}] = \mathbf{I}$	**Ampère (A)**
Température	**T**	$[\mathbf{T}] = \boldsymbol{\theta}$	**Kelvin (K)**
Intensité lumineuse	**j**	$[\mathbf{j}] = \mathbf{J}$	**Candela (Cd)**
Quantité de la matière	**n**	$[\mathbf{n}] = \mathbf{N}$	**Mole (mol)**

Exemple :

- $[\text{vitesse}] = [\text{v}] = \frac{[\text{longueur}]}{[\text{temps}]} = \frac{[\text{l}]}{[\text{t}]} = \frac{\text{L}}{\text{T}} = \text{LT}^{-1}$ et l'unité de la vitesse est m/s
- $[\text{accélération}] = [\text{a}] = \frac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} = \frac{[\text{v}]}{[\text{t}]} = \frac{\text{LT}^{-1}}{\text{T}} = \text{LT}^{-2}$ et l'unité de l'accélération est m/s^2
- $[\text{Force}] = [\text{F}] = [\text{masse}][\text{accélération}] = [\text{m}][\text{a}] = \text{MLT}^{-2}$ et l'unité de la force est Newton ou ($kg.m/s^2$).

Remarque :

- La dimension des constantes égale toujours à 1, on dit qu'ils n'ont pas de dimension.
- L'angle et les fonctions sin, cos, tg, exp, ln, log sont des fonctions sans dimension.

$[\text{Chiffre}] = 1$, $[\text{angle}] = 1$, $[cos\ \alpha] = [sin\ \alpha] = [tg\ \alpha] = [cotg\ \alpha] = [\ln x] = [e^x] = 1$

6. Homogénéité des équations aux dimensions

Les deux membres d'une équation aux dimensions doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils représentent des grandeurs de même nature.

G est une grandeur physique :

Si $G = A \pm B \Rightarrow [G] = [A] = [B]$

Si $G = A * B \Rightarrow [G] = [A] * [B]$

Si $G = A/B \Rightarrow [G] = [A]/[B]$

Si $G = A^n \Rightarrow [G] = [A]^n$

<u>Remarque :</u>

- Une équation Hétérogène (non homogène) est forcément Fausse.
- Une équation homogène n'est pas forcément vraie.
- **On ne peut pas additionner (ni soustraire) des dimensions.**

<u>Exemple :</u> $y = \frac{1}{2}\ at^2 + v_0 t + y_0$ est l'équation d'une loi physique.

Vérifier que cette équation est homogène ?

Cette équation est homogène si :

$$[y] = \left[\frac{1}{2}\ at^2\right] = [v_0 t] = [y_0]$$

Nous avons

$[y] = [y_0] = L,\ \left[\frac{1}{2}\ at^2\right] = \left[\frac{1}{2}\ \right][a][t]^2 = 1\ LT^{-2}T^2 = L\ ,\ [v_0 t] = [v_0][t] = LT^{-1}T = L$

Donc

$[y] = \left[\frac{1}{2}\ at^2\right] = [v_0 t] = [y_0]$ est vérifiée

D'où l'équation $y = \frac{1}{2}\ at^2 + v_0 t + y_0$ est homogène.

Remarques :

On peut utiliser cette propriété des équations aux dimensions pour trouver des lois physiques en connaissant les variables qui agissent dans le phénomène physique en question et la relation entre eux.

Exemple 1:

La période est donnée en fonction d'une longueur et d'une gravité par la relation suivante :

$$T=k\,.l^{x}.g^{y}$$

Donner la loi physique de la période T ?

Pour cela il faut déterminer les exposants x et y.

- On suppose que l'équation est homogène donc : $[\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{k}][\boldsymbol{l}]^{x}[\boldsymbol{g}]^{y}$
- On écrit les dimensions de toutes les grandeurs physiques qui se trouvent dans la relation étudiée.

$$[l] = L, [k] = 1, \text{T est un temps } [T] = T\ et$$

Nous avons la force du poids p=mg avec :

$$[\boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{m}][\boldsymbol{g}] \Rightarrow [\boldsymbol{g}] = \frac{[\boldsymbol{p}]}{[\boldsymbol{m}]}$$

P : le poids est une force donc il a la dimension d'une force : $[p] = [F] = MLT^{-2}$

Donc $[g] = \frac{[F]}{[m]} = \frac{MLT^{-2}}{M} = LT^{-2}$

$$donc\ \text{g est une accélération } [g] = LT^{-2}$$

D'où $T=1\,.\,L^{x}\,.\,(LT^{-2})^{y} \Rightarrow M^{0}L^{0}T^{1} = L^{x+y}\,.T^{-2y}$

Par identification on aura :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad T = k\, l^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T = k\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ c'est la loi de la pèriode}$$

Exemple 2 :

La vitesse moyenne des particules s'écrit en fonction de la masse m, le volume V et la pression p par :

v = f (m, V, p)= $k.m^{\alpha}.V^{\beta}.p^{\gamma}$

On suppose que l'équation est homogène donc $[v] = k[m]^{\alpha}[V]^{\beta}[p]^{\gamma}$ (1)

Avec $[m] = M, [v] = LT^{-1}, [V] = L^3, [p] = \frac{[F]}{[s]} = \frac{[m][a]}{[s]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

(1)$\Rightarrow M^0LT^{-1} = M^{\alpha}L^{3\beta}(ML^{-1}T^{-2})^{\gamma}$

$$\Rightarrow M^0LT^{-1} = M^{\alpha+\gamma}L^{3\beta-\gamma}T^{-2\gamma}$$

Par identification on aura :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 3\beta - \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha = -\gamma = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1+\gamma}{3} = \frac{1+1/2}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $v = km^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = k\sqrt{\frac{pV}{m}}$ c'est la loi de la vitesse moyenne des particules.

Conclusion :

L'intérêt de l'analyse dimensionnelle est :

- ✓ La vérification de l'homogénéité des formules physiques.
- ✓ La recherche de la nature d'une grandeur physique.
- ✓ La recherche de la forme générale des lois physiques.

2ème partie : Calcul d'incertitude

1. Introduction

Dans une expérience, il n'existe pas de mesures exactes. Celles-ci sont toujours accompagnées d'erreurs plus ou moins importantes selon la méthode de mesure utilisée, la qualité des instruments utilisées et le rôle de l'opérateur. L'instrument de mesure, même construit sur un étalon, possède aussi une certaine précision communiquée par le fabricant. Les mesures sont donc réalisées avec des approximations. L'estimation des erreurs, commises sur les mesures et de leurs conséquences, est alors indispensable.

2. Incertitude absolue et relative

2 .1. Erreur absolue

L'erreur absolue d'une grandeur G mesurée est la différence δG entre la valeur expérimentale G_m et une valeur de référence susceptible d'être considérée comme exacte G_e. En réalité, la valeur exacte étant inaccessible, on l'approche en effectuant la moyenne d'une série de mesures de la grandeur G.

$$\boldsymbol{\delta G = |G_{mesurée} - G_{exacte}|}$$

2 .2 Erreur relative

L'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence. L'erreur relative est sans dimension; elle nous indique la qualité (la précision) du résultat obtenu. Elle s'exprime en termes de pourcentage.

$$\boldsymbol{\frac{\delta G}{G} = \frac{|G_{mesurée} - G_{exacte}|}{G_{mesurée}}}$$

2.3. Incertitude absolue

C'est l'erreur maximale susceptible d'être commise dans l'évaluation.

$\Delta G \geq |\delta G| \Rightarrow \Delta G = |G_{ex} - G_m|$

$$\Rightarrow G_{ex} = G_m \pm \Delta G$$

$$\Rightarrow G_m - \Delta G \leq G_{ex} \leq G_m + \Delta G$$

La forme générale est

$$G_{ex} = G_m \pm \Delta G$$

L'incertitude absolue a la même unité que la grandeur mesurée et elle est toujours positive.

Exemple : m=12,121g et Δm=0,02g

L'écriture condensée de m est : m=(12,121±0,020) g

2.4. Incertitude relative

L'incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée de G. Elle s'exprime également en termes de pourcentage et c'est une manière commode de chiffrer la précision d'une mesure. Elle est notée par : $\frac{\Delta G}{G}$

Elle est donnée en pourcentage et elle est toujours plus petite que 1.

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}02}{12{,}121} \approx 0.16\%$$

3. Calcul d'incertitudes

En général il existe deux méthodes mathématiques pour le calcul d'incertitudes: la différentielle totale qui est une méthode générale et la méthode logarithmique, elle est limitée aux lois physiques sous forme d'un produit ou d'un rapport.

3.1. Méthode de la différentielle totale

Soit la fonction f(x,y,z) qui dépend de trois variables x,y,z :

La différentielle totale de la fonction f s'écrit par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z=cst} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z=cst} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y=cst} dz}$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ est la différentielle partielle de la fonction f par rapport à x en considérant y et z constantes.

$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ est la différentielle partielle de la fonction f par rapport à y en considérant x et z constantes.

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ est la différentielle partielle de la fonction f par rapport à z en considérant x et y constantes.

L'incertitude absolue sur f s'écrit généralement sous forme :

$$\boldsymbol{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z}$$

<u>Exemple :</u>

Soit f(x,y) une grandeur physique qui dépend de deux variable x et y.

f s'écrit par : $f(x,y) = 2xy + x^2y$

la différentielle totale de f est donnée par : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + x^2$

donc $df = (2y + 2xy)dx + (2x + x^2)dy$

d'où l'incertitude absolue sur la grandeur f est donnée par :

$$\Delta f = |2y + 2xy|\Delta x + |2x + x^2|\Delta y$$

3.1. Méthode logarithmique

Cette méthode est basée sur le logarithme et sa dérivée.

Soit la fonction à trois variables, G=f(x,y,z). Pour calculer l'incertitude relative sur la fonction G, en utilisant la méthode de la différentielle logarithmique, on doit suivre les étapes suivantes :

- Introduire la fonction log sur la fonction G.
- Calculer $d(\log G) = \frac{dG}{G\, ln10}$ ou $d(\ln G) = \frac{dG}{G}$
- $\frac{dG}{G} \leq \frac{\Delta G}{G}$ et on déduire l'incertitude relative sur G.

<u>Exemple</u>

soit la fonction $f(x,y,z) = x^a y^b z^c$

x, y et z sont des variables et a, b et c sont des exposants constants

on trouve d'abord log f :

$\log f = \log x^a y^b z^c = \log x^a + \log y^b + \log z^c = a \log x + b \log y + c \log z$

on calcul ensuite la dérivée de log f :

$$d\log f = a\, d\log x + b\, d\log y + c\, d\log z$$

$$\frac{df}{f} = a\,\frac{dx}{x} + b\,\frac{dy}{y} + c\,\frac{dz}{z}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{a}{x}\right| \Delta x + \left|\frac{b}{y}\right| \Delta y + \left|\frac{c}{z}\right| \Delta z$$

Si x, y, z, a, b et c sont des constantes positives, on peut écrire $\frac{\Delta f}{f}$ par :

$$\frac{\Delta f}{f} = a\,\frac{\Delta x}{x} + b\,\frac{\Delta y}{y} + c\,\frac{\Delta z}{z}$$

$\frac{\Delta f}{f}$ Représente l'incertitude relative.