Université De Tlemcen
Faculté Des Sciences

Année Universitaire 2024/2025

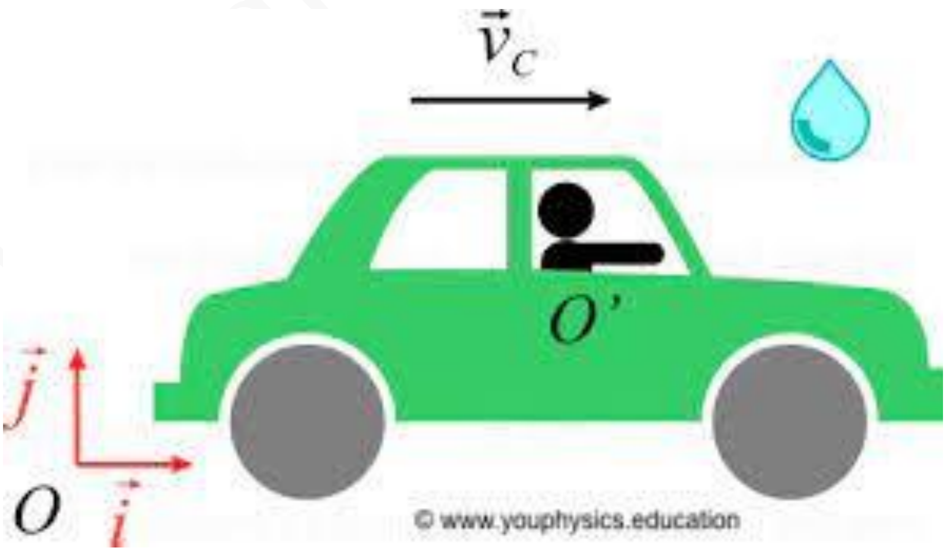
Département De Mathématiques

1ERE ANNEE LMD-MI

COURS DE MECANIQUE DU POINT MATERIELC

Chapitre IV : Mouvement Relatif

Préparé par : Mme Hadjou Belaid Zakia



Sommaire

1. Introduction

L'état de mouvement ou de repos sont deux notions essentiellement relatives; cela veut dire que chacun des deux états dépend de la position du mobile vis-à-vis du corps pris comme référentiel. Tous les mouvements que nous avons étudiés jusqu'à présent, étaient dans un repère galiléen, c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. Lorsque deux observateurs liés à deux repères différents qui sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, la position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du même mobile varient selon le repère choisi par l'observateur.

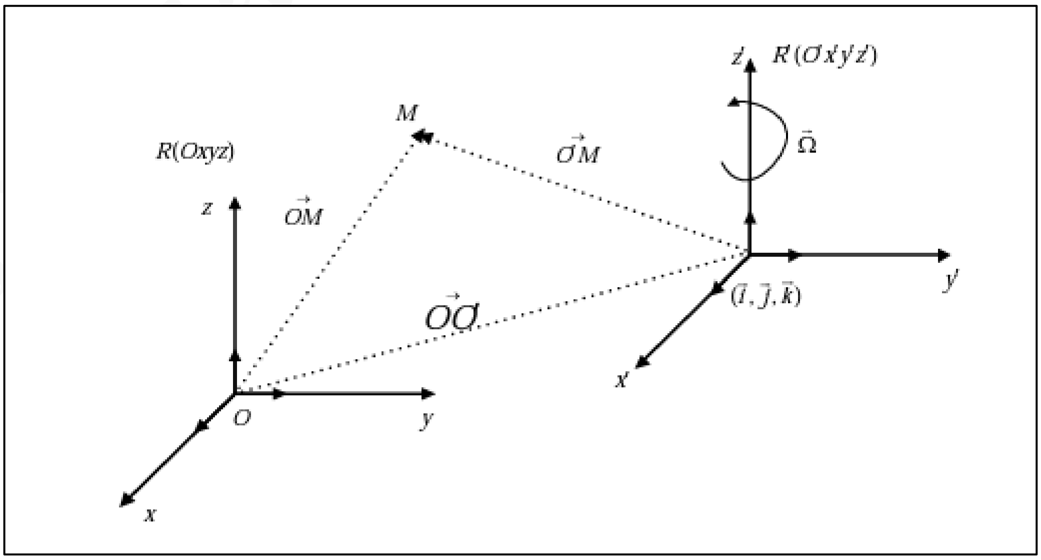
En effet, un voyageur par bus, à titre d'exemple, est en mouvement par rapport un observateur assis sur le bord de la route, alors qu'il est au repos par rapport à un autre observateur (voyageur prêtant le même bus). Donc, il est clair que la notion du mouvement ou celle du repos sont intimement liées à la position de l'observateur.

Dire observateur c'est dire choisir un référentiel pour déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un objet mobile à chaque instant.

2. Composition des mouvements

Soit R_0 (o, x, y, z) référentiel fixe ou absolu (Galiléen) et R (o', x', y', z') référentiel mobile par rapport à (R_0), ou relatif (non-Galiléen).

Il est toujours utile de savoir déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un point matériel M dans un référentiel fixe si elles sont connues dans l'autre référentiel relatif et vis-versa.



Associons au référentiel R (appelé **référentiel absolu**) le repère R ($O,\vec{i}, \vec{j},\vec{k}$) et au référentiel R' (appelé **référentiel relatif**) le repère R' ($O',\vec{i'}, \vec{j'},\vec{k'}$).

Si M est un point mobile dans l'espace, défini par les coordonnées (x, y, z) dans le repère fixe (R) et par (x', y', z') dans le repère mobile (R').

<u>On appellera :</u>

Mouvement relatif : le mouvement de M par rapport à (R').

Mouvement absolue : Le mouvement de M par rapport à (R).

Mouvement d'entrainement : le mouvement du repère mobile (R') par rapport au repère fixe (R).

2.1 Composition de la vitesse

Si on connait le mouvement relatif i.e. le mouvement du point matériel considéré dans le repère mobile (repère relatif) et celui du repère mobile par rapport au repère fixe (repère fixe).

On à : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)$

Avec $\overrightarrow{OM} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$ dans le repère fixe R

Et $\overrightarrow{O'M} = \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)$ dans le repère mobile R'

La vitesse s'écrit alors : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$= \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \overrightarrow{v(M)}/(R) \\ \vec{v_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} / (R') = \overrightarrow{v(M)}/(R') \\ \vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} = \overrightarrow{v(R')}/(R) \end{cases}$$

$\vec{v_a}$ représente **la vitesse absolue**, c'est la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le repère fixe.

$\overrightarrow{\boldsymbol{v_r}}$ est **la vitesse relative**, c'est la dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps dans le repère mobile.

$\overrightarrow{\boldsymbol{v_e}}$ correspond à **la vitesse d'entrainement**, c'est la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le repère fixe, en considérant le point mobile M fixe dans le repère mobile (x′, y′ et z′ sont constantes). Elle représente aussi la vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe.

La loi de composition de la vitesse est donnée par : $\overrightarrow{\boldsymbol{v_a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_r}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_e}}$

Remarques :

1. Lorsque le mouvement d'entrainement est un mouvement de translation, les vecteurs $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}et\ \overrightarrow{k'}$ restent parallèles aux vecteurs unitaires ($\vec{i}$, $\vec{j}$et $\vec{k}$) du repère fixe.

Donc $\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_e} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)/R$

2. Si le repère mobile (R') présente un mouvement de rotation par rapport au repère fixe(R) ; la vitesse d'entrainement peut s'écrire aussi par :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

Avec $\vec{\omega}$ représente la vitesse de rotation de R'/R.

3. Dans le cas d'un mouvement de translation $\vec{\omega} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$.

2.2. Composition de l'accélération

Nous avons l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{\boldsymbol{dx'}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{i'}} + \frac{\boldsymbol{dy'}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{j'}} + \frac{\boldsymbol{dz'}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{k'}} + x'\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{i'}\right) = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{i'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'}\right) = \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}\right) = \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt}\right)=\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt}+x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y'\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt}\right)=\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt}+y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)=\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{i'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}+\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}+2(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})$$

Avec

$$\overrightarrow{a_a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_r}=\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{i'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}$$

$$\overrightarrow{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{a_c}=\ 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a_c}=2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r}$$

Alors la loi de composition de l'accélération sera :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_c}+\overrightarrow{a_e}}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{a_a}}$ est l'accélération absolue qui représente la deuxiéme dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le repère fixe. C'est l'accélération de M dans le repère fixe.

$\boldsymbol{\overrightarrow{a_r}}$ est l'accélération relative qui représente la deuxiéme dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps dans le repère mobile. C'est l'accélération de M dans le repère mobile.

$\overrightarrow{\boldsymbol{a_e}}$ est l'accélération d'entrainement qui représente l'accélération du mouvement du repère mobile par rapport au repère fixe. C'est l'accélération de repère mobile R' par rapport au repère fixe R.

$\overrightarrow{\boldsymbol{a_c}}$ est l'accélération de Coriolis ou l'accélération complémentaire (elle n'a aucun sens physique).

Remarque :

Si le repère mobile (R') présente un mouvement de rotation par rapport au repère fixe (R) ; la vitesse d'entrainement peut s'écrire aussi par :

$$\overrightarrow{v_e} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)/R + (\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M})/R'$$

l'accélération d'entrainnement par :

$$\overrightarrow{a_e} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)/R + (\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M})/R' + \left(\vec{\omega}\Lambda\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right)/\text{R'}$$

et l'accélération de Coriolis par :

$$\overrightarrow{a_c} = 2.(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r})/R'$$

Avec $\vec{\omega}$ représente la vitesse de rotation de R'/R.

<u>Cas particuliers</u> :

1. Lorsque le mouvement d'entrainement est **un mouvement de translation**, les vecteurs $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'} et\ \vec{k'}$ restent parallèles aux vecteurs unitaires ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$) du repère fixe.

Donc $\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{0}$ et $\boldsymbol{\vec{\omega} = \vec{0}}$

alors $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}, \overrightarrow{a_e} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)$ et $\overrightarrow{a_c} = \vec{0}$.

2. si R' a un mouvement réctiligne uniforme alors $\boldsymbol{\vec{\omega} = \vec{0},} \overrightarrow{a_c} = \vec{0}$, $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = cst$ et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{a_e} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{v_e} = cst.$

3. Si R' a une rotation pure autour de R (R' et R ont le mem origine), on a donc :

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$ et $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{v_e} = (\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M})/R'$

Et $\overrightarrow{a_e} = (\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M})/R' + \left(\vec{\omega}\Lambda\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right)/\text{R'}$

Exercice d'application :

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel (R) muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par :

$$x = 2t^3 + 1, \qquad y = 4t^2 + t - 1, \qquad z = t^2$$

Dans un deuxième référentiel (R') muni du repère $(O', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ avec $\vec{\imath} = \vec{\imath'}, \vec{\jmath} = \vec{\jmath'}, \vec{k} = \vec{k'}$ sont données par :

$$x' = 2t^3, \qquad y' = 4t^2 - 3t + 2, \qquad z' = t^2 - 5$$

1-Exprimez la vitesse v de M dans (R) en fonction de sa vitesse v' dans (R'), procéder de même pour les accélérations

2-Définir le mouvement d'entrainement de (R') par rapport à (R).

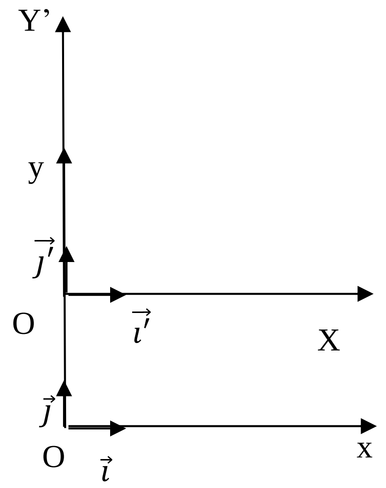
Corrigé :

$$\overrightarrow{OM}/(R)\begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = 4t^2 + t - 1 \\ z = t^2 \end{cases} \quad et \ \ \overrightarrow{O'M}(R')\begin{cases} x' = 2t^3 \\ y' = 4t^2 - 3t + 2 \\ z' = t^2 - 5 \end{cases}$$

1. La vitesse du point M dans le référentiel fixe (R) et le référentiel mobile (R')

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6t^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 8t + 1 \\ \dfrac{dz}{dt} = 2t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = 6t^2 \\ \dfrac{dy'}{dt} = 8t - 3 \\ \dfrac{dz'}{dt} = 2t \end{cases}$$



Donc :

$\vec{v} = 6t^2\vec{\imath} + (8t + 1)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$ et $\overrightarrow{v'} = 6t^2\vec{\imath} + (8t - 3)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$

On a : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \Rightarrow \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_r}$

$\overrightarrow{v_e} = (6t^2\vec{\imath} + (8t + 1)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}) - (6t^2\vec{\imath} + (8t - 3)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}) = 4\vec{\jmath}$

donc $\boldsymbol{\vec{v} = \vec{v}' + 4\vec{\jmath}}$

et $\boldsymbol{\vec{\imath} = \vec{\imath}', \vec{\jmath} = \vec{\jmath}', \vec{k} = \vec{k}'}$

2. L'accélération du point M dans les deux référentiels fixe (R) et mobile (R')

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 12t \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 8 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 2 \end{cases}$$

Et
$$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v\prime}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dv\prime_x}{dt} = 12t \\ \dfrac{dv\prime_y}{dt} = 8 \\ \dfrac{dv\prime_z}{dt} = 2 \end{cases}$$

Donc $\vec{a} = \overrightarrow{a'}$ ou $\overrightarrow{a_a}$=$\overrightarrow{a_r}$

Conclusion :

Le mouvement du référentiel (R') par rapport au référentiel fixe (R) est un mouvement de translation uniforme suivant l'axe Oy avec une vitesse constante de 4m/s.

Références

1. http://physiquereussite.fr/les-mouvements-en-mecanique-classique/

2.https://elearning.univmsila.dz/moodle/pluginfile.php/228109/mod_resource/content/1/Chapitre%20N%C2%B03%20Mouvement%20relatif%20.pdf.

3. M.D. Greenberg, *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition (Prentice-Hall, 1998).