Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2024 - 2025
Module: Algèbre 1
L1 Math+MI

T.D N°3 : Relations binaires

Exercice 1

On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation R par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ x\, R\, y \iff x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}$ on définit les relations $\Re_1$ et $\Re_2$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x\, \Re_1\, y \iff x - y \in \mathbb{N}$$

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x\, \Re_2\, y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

(1) Montrer que $\Re_1$ est une relation d'ordre.

(2) Cet ordre est-il total?

(3) Montrer que $\Re_2$ n'est pas une relation d'ordre, mais c'est une relation d'équivalence.

(4) Déterminer les classes d'équivalence de 0, 1 et $a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall a,\ b \in \mathbb{N}^*,\ a\, \Re\, b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } a^n = b.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

(2) Cet ordre est-il total ?

(3) Soit l'ensemble $A = \{1,\ 4,\ 8\}$. Déterminer s'ils existent, $\max(A)$ et $\min(A)$ au sens de cet ordre .

Exercices supplémentaires

Exercice 1

(1) Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

(i) $E = \mathbb{Z}$ et $x \Re y \iff x = -y$

(ii) $E = \mathbb{R}$ et $x \Re y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$

(iii) $E = \mathbb{N}$ et $x \Re y \iff \exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = p x^q$.

(2) Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Exercice 2

(1) Soit $\Re$ une relation binaire réflexive définie dans un ensemble E telle que :

$$\forall x,y,z \in E : x\Re y \text{ et } y\Re x \Rightarrow z\Re x.$$

Une telle relation est dite circulaire.

- Vérifier que $\Re$ est une relation d'équivalence.

(2) Soit S une relation réflexive et transitive définie sur un ensemble E et $\triangle$ une autre relation définie par :

$$\forall x,y \in E,\ x\triangle y \Leftrightarrow xSy \ \wedge ySx.$$

- Vérifier que $\triangle$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3

On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ x\Re y \Longleftrightarrow \frac{x}{y} > 0.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl(1)$, $cl(-2)$ et $cl(a)$ où $a \in \mathbb{R}^*$. ? En déduire $\mathbb{R}^*/\Re$

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\Re$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, x\Re y \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x - y = 2\pi n.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl(0)$, $cl(\pi)$ et $cl(2\pi)$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\Re$ par:

$$\forall\ (x,y),\ (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y)\Re(x',y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } \big(x = x' \text{ et } y \leq y'\big)$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

(2) Cet ordre est-il total?

Exercice 6

Soit $\Re$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ (a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl(1,2)$ et $cl(-1,2)$.

Exercice 7

On définit dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\leq$ par :

$$\forall (x,y) \leq (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \leq (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } \ y \leq y'.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Cet ordre est-il total?

(2) Déterminer $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$ et $\min(A)$ s'ils existent où

$$A = \big\{(1,2),\ (3,1)\big\}.$$

Exercice 8

Soit S la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x\,S\,y \ \Leftrightarrow x^3 - y^3 = a - b$$

(1) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(2) Discuter suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$, le cardinal de $cl(m)$.