Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2024 - 2025
Module: Algèbre 1
L1 Math+MI

T.D N°2 : Ensembles et applications

Exercice 1

(1) Ecrire en extension les ensembles suivants:
$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \setminus -\frac{3}{\sqrt{2}} < n-1 < 2\sqrt{\pi} \right\}$ et $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 - 1 = 0 \right\}$.
(2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants:
$C = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \frac{12}{13}, \frac{14}{15} \right\}$ et $D = \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots \right\}$.
(3) Soit $E = \{1,2,3\} \subset \mathbb{N}$. Déterminer $P(E)$ l'ensemble des parties de E.
(4) Soient A, B et C des parties de $P(E)$ données par :
$A = \left\{ X \in P(E) : 1 \in X \right\}$, $B = \left\{ X \in P(E) : 2 \notin X \right\}$, $C = \left\{ X \in P(E) : 1 \notin X \text{ et } 3 \in X \right\}$.
- Donner les ensembles A, B et C en extension.
(5) Déterminer
$A \cap B$, .$A \setminus B$, $B \cup C$, and $\overline{C} = C_{P(E)}(C)$, le complémentaire de C dans $P(E)$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$.
(i) Montrer que la famille des ensembles $\left\{ A_n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est un recouvrement de l'intervalle $]0,1]$.
(ii) En déduire que $\{A_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partition de $]0,1]$.

Exercice 3

Soient A, B, et C des parties d'un ensemble E. Montrer que :
(1) $\left[A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \right] \Rightarrow B = C$
(2) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$, en utilisant :
(i) Raisonnement directe.
(ii) La contraposée.
(3) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 4 $(Devoir - maison)$

On considère les deux ensembles E et F définis par :

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 1 - \frac{x}{2} \right| \leq 1 \right\} \text{ et } F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R}^+, x = t + 2 \right\}.$$

(1) Ecrire E sous la forme d'un intervalle $[a, b]$.
(2) Montrer que $F = [2, +\infty[$.
(3) Déterminer $E \cap F$, $E \cup F$, $E \setminus F$, $F \setminus E$, $F \triangle E$ et $C_{\mathbb{R}^+}(E)$, le complémentaire de E par rapport à $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5

On note par D_{24} l'ensemble des diviseurs de 24. Considérons les ensembles E et F définis par :
$E = \left\{n \in D_{24} \ : \ n \text{ est pair}\right\}$ et $F = \left\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ est premier et } n < 9\right\} \cup \{1, 10\}$.
Soit $f : E \to F$ une application définie par son graphe $G = \{(2,3), (4,5), (6,1), (8,5), (12,7), (24,10)\}$.
(1) Vérifier que f est bien une application.
(2) f est-elle injective? surjective?
(3) Déterminer $f(6)$, $f(\{6\})$, $f\left(\{n \in E \setminus n \text{ divise } 8\}\right)$ et $f(E)$.
(4) Déterminer $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}\left(\{n \in \mathbb{N} \setminus n \text{ est premier et } n < 9\}\right)$ et $f^{-1}(F)$.

Exercice 6

On note $J =]1, +\infty[$. Soient f et $g : J \to J$ deux applications définies par :

$$\forall x \in J,\ f(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \text{ et } g(x) = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}\right)^2.$$

(1) Déterminer $f([2, 4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$.
(2) Montrer que f est une bijection de J dans J et déterminer sa bijection réciproque.
(3) Vérifier que : $\forall x \in J,\ g(x) = (f(x))^2$.
(4) En déduire que : g est une bijection de de J dans J et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 7

On note $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Soit $f : U \to U$ une application définie par:

$$f(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

(1) Montrer que f est injective? $\left(\text{On peut poser } t = \frac{y}{x}\right)$.
(2) f est-elle surjective? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 8 $(Devoir - maison)$

Soient f et g deux applications définies par :

$$f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}/\{4\} \qquad x \mapsto \frac{4x + 1}{x - 3} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}/\{4\} \to \mathbb{R}\setminus\{3\} \qquad x \mapsto \frac{3x + 1}{x - 4}$$

(1) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{4\}, \frac{3y + 1}{y - 4} \neq 3$.
(2) Déterminer pour $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{1,\ 3\right\}$ l'image de $3x$ par f et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-2,\ 2,\ 4\right\}$ l'image de x^2 par g.
(3) Déterminer les antécédents de $y = 1$ par f et par g.
(4) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
(5) Montrer que f est injective.
(6) f est-elle surjective?
(7) f est-elle bijective? Si oui, déterminer f^{-1}.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1

Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

(1) Les couples $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent-ils à A?

(2) Montrer que A ne peut être le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Indication : Par l'absurde et remaquer que $(1,1) \notin A$.

Exercice 2

Considérons les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash\, \exists\, t \in \left[0,\ 1\right] : x = t + 2\right\} \text{ et}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash\, \left| x - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

(1) Ecrire l'ensemble B sous la forme d'un intervalle $[a,b]$.

(2) Montrer que $A = B$.

Exercice 3

Soient $A, B,$ et C des parties d'un ensemble E. Montrer que :

(1) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$

(2) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

(3) $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

Exercice 4

(1) Considérons les ensembles suivants:

$A = \left\{\dfrac{5n+8}{8n-1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ et $B = \left\{\dfrac{2n+4}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(i) Est ce que $\dfrac{17}{3} \in A$? $\dfrac{18}{15} \in A$? $\dfrac{43}{25} \in B$? $\dfrac{42}{37} \in B$?

(ii) Montrer que $\dfrac{6}{5}$ est un élément commun entre les ensembles A et B.

(2) Soient $C = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $D = \left\{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Montrer que $A \cap B = \varnothing$.

Exercice 5

Considérons les deux parties de $\mathbb{R}^2$, $E = [0,1]$ et $F = [0,2]$

(1) Dessiner $E \times F$ et $E \times E$.

(2) Soient $\begin{array}{l} f : E \to F \\ \quad x \mapsto 2 - x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g : F \to E \\ \quad x \mapsto (x-1)^2 \end{array}$ deux applications.

(3) Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$ et $g \circ f = g$?

(4) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$.

(5) Montrer que : $g \circ f$ et bijective et préciser $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) Déterminer $f(2)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 2$. f est-elle surjective? Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

(3) Montrer que l'application g définie sur $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ par: $f(x) = g(x)$ est bijective et déterminer son inverse g^{-1}.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{4 + x^2}}.$$

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \setminus x^2 = 4\}\right)$, $f(\mathbb{R}^+)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R}^+ \setminus |y| = 1\}\right)$.

(2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Soit $g = f\backslash_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to J$ où $J = f(\mathbb{R}^+)$, la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

- Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

Exercise 8

On définit les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \to [2, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \sqrt{1 + x + x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = 1 + \sqrt{1 + x^2}$$

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \setminus x^2 + x - \alpha(\alpha+1) = 0,\ \text{où } \alpha \in \mathbb{R}^{+*}\}\right)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R}^+ \setminus 2|y| = 1\}\right)$.

(2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Montrer que g is bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 9

Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$ une application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$.

(1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2$.

(2) Ecrire l'application h comme la composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$.

(3) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

(4) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

(5) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercise 10

Soient $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ deux applications.

$x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$

(1) Déterminer $f(\{-1, 1\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.

(2) Is f injective? Surjective?

(3) Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

Exercice 11

(I) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

(1) Déterminer $f\left(\{x \in \mathbb{R} \setminus |x| = 1\}\right)$ et $f^{-1}\left(\{y \in \mathbb{R} \setminus y^3 = 8\}\right)$.

(2) f est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Déterminer $f\left(\left[1, \sqrt{3}\,\right]\right)$, $f\left(\left]-\sqrt{3}, -1\right]\right)$, $f\left(\left[-1, 2\sqrt{2}\,\right[\right)$, $f(\mathbb{R}^+)$, $f^{-1}(]0,1])$ et $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

(II) Soit $g = f\backslash_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to J$ où $J = f(\mathbb{R}^+)$. (g est la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$).

(1) Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.

(2) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ par deux méthodes.

(3) Calculer $g \circ g^{-1}(y)$ pour $y \in J$ et $g^{-1} \circ g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.