Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2024 - 2025
Module: Algèbre 1
L1 Math

T.D N°1 : Logique et raisonnements

Exercice 1

(1) Soient P, Q et R des propositions. Montrer que :

$$\left[\left(P\wedge\overline{Q}\right)\Rightarrow R\right]\Leftrightarrow\left[\overline{P}\vee\left(\overline{Q}\Rightarrow R\right)\right]$$

en utilisant :
(i) La table de vérité.
(ii) La définition d'une implication, sa négation, les lois de De Morgane et les propriétés des connecteurs logiques.
(2) En utilisant la table de vérité, montrer que l'implication suivante est toujours vraie :

$$\left[(P\Rightarrow Q)\wedge\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\right]\Rightarrow Q$$

Application : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que : $n(n+1)$ est pair

Exercice 2 $\left(\textit{Connecteurs NAND } (\textit{NON ET}) \textit{ et NOR } (\textit{NON OU})\right)$

Pour deux propositions P et Q, on définit les connecteurs $NAND$ $(NON\ ET)$ et NOR $(NON\ OU)$ par

$$P \text{ NAND } Q\Leftrightarrow P\uparrow Q\Leftrightarrow\overline{P\wedge Q} \text{ et } P\ NOR\ Q\Leftrightarrow P\downarrow Q\Leftrightarrow\overline{P\vee Q}$$

(1) Dresser les tables de vérité des deux connecteurs $NAND$ et NOR.
(2) Déterminer $P\uparrow P, P\downarrow P, \overline{P\uparrow Q}$ et $\overline{P\downarrow Q}$
(3) Exprimer $\overline{P}, P\vee Q, P\wedge Q$ et $P\Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs $NAND\uparrow$ et $NOR\downarrow$.
Remarque : Les connecteurs $NAND\uparrow$ et NOR $\downarrow$ ont une importance en informatique et en électronique.

Exercise 3

(I) Donner la négation et la valeur de vérité des propositions (prédicats) suivantes:

$$P_1 : \exists x\in\mathbb{R}, x^2-2=0 \qquad P_2\ \forall x\in\mathbb{R}^+, \exists n\in\mathbb{N} : n>x$$
$$Q_1 : \forall n\in\mathbb{N}, \frac{n+1}{2}\in\mathbb{N} \qquad Q_2 : \exists x\in[0,\pi], \cos x+\sin x=1$$
$$R_1 : \forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R} : y^2=x \qquad R_2 : \exists x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R} : y^2=x$$

(II) Ecrire à l'aide des quantificateurs et des symboles mathématiques les expressions suivantes:
(1) Pour tout réel x, il existe un entier naturel n, tel que x est inférieur à n.
(2) Pour tout réel x, il existe un entier relatif n, tel que x est superieur ou égal à n et inférieur strictement à $n+1$.
(3) Entre deux réels il existe au moins un rationnel.
(4) Certains réels sont strictement superieurs à leur carré..
(5) **(supp)** Le cube de tout réel est positif.
(6) **(supp)** Il existe un unique entier naturel inferieur stictement à tous les autres entiers naturels.
(7) **(supp)** Il existe un entier naturel non nul qui divise tout entier relatif non nul.
(8) **(supp)** L'équation $x^2-2=0$ admet au moins une solution rationnelle.

Exercice 4

(I) $\left(\textit{Raisonnements directs}\right)$ Démontrer les assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$$
$$(3) \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

(II) $(\textit{Contraposée ou absurde})$

(1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq -5$ et $x \neq -8) \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2.$

(2) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'énoncé : si $n^2 - 1$ n'est pas un multiple de 4, alors n est pair.

(1) Écrire cet énoncé sous la forme d'une implication $P \Rightarrow Q$.

(2) Écrire la contraposée et l'inverse de cette implication $P \Rightarrow Q$.

(3) Montrer l' implication $P \Rightarrow Q$ par contraposition.

P⇒Q est-elle vraie?

(4) L'implication inverse de $P \Rightarrow Q$ est-elle vraie?

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition

$$A\ :\ n^3 \text{ est pair} \Rightarrow\ n \text{ est pair.}$$

(1) Écrire la négation de la proposition A.

(2) Écrire la contraposée de la proposition A.

(3) Show that proposition A is true.

(4) Montrer par l'absurde que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 7 (Raisonnement par récurrence)

(1) Soit $x > 0$. Montrer par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geq 1 + n.x$ (Inégalité de Bernoulli)

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}.+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}$

(i) Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$ et S_4.

(ii) Proposer ou conjecturer une formule en n pour S_n.

(iii) Démontrer cette formule par récurrence.

(3) (**supp**) Soit $x_1,\ x_2, \ldots x_n \in [0,\ 1]$.

Montrer par récurrence que : $\forall\ n \geq 1,\ \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$

Indication :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1-x_k) = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) + (1-x_{n+1})\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

Exercice 8 $\left(\textit{différents types de démonstrations pour un énoncé évident}\right)$

Proposer de l'énoncé suivant divers démonstrations : $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, l'entier $5^n + 1$ est pair.

(i) Par récurrence (ii) Par l'absurde (iii) En utilisant une identité remarquable pour factoriser $5^n - 1$

(iv) En utilisant une méthode distincte des trois précédentes.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

(1) En utilisant la table de vérité, lesquelles des trois propositions suivantes sont équivalentes ?
$[(P \vee Q) \Rightarrow R]$, $[(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)]$ et $[(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$.
(2) (i) En utilisant la table de vérité, montrer que l'implication suivante est toujours vraie:

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow Q]$$

(ii) En déduire que

$$\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)\right] \Rightarrow Q$$

(iii) Application : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$$

(3) Démontrer que les implications suivantes : (A) $\quad (P \wedge Q) \Rightarrow \overline{Q}$ et (B) $\quad \left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow Q$ sont vraies toutes les deux si et seulement si P est fausse.
(4) La proposition suivante est elle vraie? $\quad (P \wedge Q) \Rightarrow (\overline{P} \vee Q)$
(5) Les propositions suivantes sont-elles des tautologies?

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q \quad \text{et} \quad (P \vee \overline{P}) \vee Q \Rightarrow (P \wedge \overline{P}) \wedge \overline{Q}$$

Exercice 2 $\left(\textit{Le OU exclusif } (XOR) \textit{ noté } \oplus\right)$

Pour deux propositions A et B, on définit le OU exclusif (XOR) noté $\oplus$ par: $A \oplus B$ est vraie si A est vraie ou B est vraie et non toutes les deux vraies à la fois. Montrer que :

$$A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee \left(\overline{A} \wedge B\right) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)$$

$$A \oplus B \Leftrightarrow B \oplus A \qquad A \oplus F \Leftrightarrow A \qquad A \oplus A \Leftrightarrow F$$

où A, B, C et F sont des propositions avec F fausse.

Exercise 3

Montrer que :
(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \frac{1}{x} \geq 2.$ .....(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Rightarrow x = y = 0$
(4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2+1} = 2x.$

Exercice 4

Montrer que les propositions suivantes sont fausses.
(i) $\forall x \in [0,1],\ x^2 \geq x$ $\quad (ii)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq x + y$ $\quad (iii)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2+b^2} = a + b$
(iv) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x,$ n'est ni paire ni impaire.
(v) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, L'entier $n^2 + n + 11$ is premier.

Exercice 5

Montrer par récurrence que :
(1) $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3^n.$ $\big($Indication : $\forall\ n \geq 2,\ n^2 \geq 2n$ et $n^2 > 1\big)$.
(2) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} .+\ldots+ \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Exercice 6

Considérons les propositions suivantes:

$$P : \forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x^2+1} + x > 0,$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \sqrt{x^2+1} + x > 0 \text{ et}$$
$$R : \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$$

(1) Montrer par un raisonnement direct que P est vraie.
(2) Ecrire la négation de la proposition Q.
(3) Montrer par l'absurde que Q est vraie.
(4) En déduire que R est vraie.

Exercice 7

(I) (1) Rappeler la somme $\sum_{k=1}^{n} k$.
(2) Vérifier que : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.
(3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(4) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

(II) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1).$$

(1) Calculer S_1, S_2 et S_3 .
(2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(3) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\left(\text{Indication : } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.

Exercise 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(1) Par une démonstration directe : montrer que

$$n \text{ est un multiple de } 3 \Rightarrow n^3 \text{ est multiple de } 3.$$

(2) En utilisant la contraposée, montrer que :

$$n^3 \text{ est un multiple de } 3 \Rightarrow n \text{ est un multiple de } 3.$$

(3) Montrer par l'absurde que $\sqrt[3]{3}$ est un nombre irrationnel.