Méthodes de raisonnements

Sommaire

- Méthode directe.
- Disjonction des cas
- Contraposition
- Absurde
- Contre exemple
- Equivalences successives
- Récurrence.

Introduction

- En mathématiques, il est fondamental de prouver des énoncés.
- Différentes méthodes sont utilisées pour établir la vérité des énoncés mathématiques.
- Voici quelques méthodes courantes de démonstration :

Méthode directe

- Une preuve directe démontre la vérité d'une proposition par une chaîne simple de déductions logiques.
- On veut montrer que la proposition « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie.
- On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.
- C'est la méthode à laquelle vous êtes la plus habitué.

Exemple 1

- Soit n un entier naturel.
- Montrer que : $\quad n$ est pair$\Longrightarrow n^2$ est pair
- n est pair $\Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$
- On a $n^2 = (2k)^2 = 2\left(2k^2\right) = 2l$ avec $l = 2k^2 \in \mathbb{N}$.
- Et par suite n^2 est pair

Exemple 2

- Montrer que: $x, y \in]-1,1[\Longrightarrow \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.
- We have
- $\alpha \in]-1,1[\iff -1 < \alpha < 1 \iff |\alpha| < 1 \iff \alpha^2 < 1 \iff \alpha^2 - 1 < 0$
- Soit $x, y \in]-1,1[$.
- $$\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 = \frac{(x+y)^2 - (1+xy)^2}{(1+xy)^2} = \frac{x^2+y^2-1-x^2y^2}{(1+xy)^2}$$
- $$= \frac{x^2-1+y^2\left(1-x^2\right)}{(1+xy)^2} = \frac{\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)}{(1+xy)^2} < 0$$
- car $x, y \in]-1,1[$, et $x^2 < 1$, $y^2 < 1$
- $$\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 < 0 \Longrightarrow \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1 \Longrightarrow \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$$
- Finalement : $\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2 - 1 < 0 \Longrightarrow \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

DISJONCTION DES CAS

- Si l'on souhaite vérifier une proposition $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E,
- on montre la proposition pour les x dans une partie A de E,
- puis pour les x n'appartenant pas à A.
- C'est la méthode de disjonction des cas ou cas par cas.

Exemple 1

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $n(n+1)(n+2)$ est pair.
- <u>1^{er} *cas* : n est pair</u> $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$
- $n(n+1)(n+2) = 2k(2k+1)(2k+2) = 2l$ avec $l = k(2k+1)(2k+2) \in \mathbb{N}$
- donc $n(n+1)(n+2)$ est pair.
- <u>$2^{ème}$ *cas* : n est impair</u> $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$
- $n(n+1)(n+2) = (2k+1)(2k+2)(2k+3)$
- $= 2(2k+1)(k+1)(2k+3)$
- $= 2l$ avec $l = (2k+1)(k+1)(2k+3) \in \mathbb{N}$.
- donc $n(n+1)(n+2)$ est pair.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ est pair.

Exemple 2

- Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq x^2 - 3x + 3$$

- We have $|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ if } x \geq 2 \\ 2-x \text{ if } x < 2 \end{cases}$

$$\text{Si } x \geq 2, |x-2| = x-2 \leq x^2 - 3x + 3$$

$$\text{Donc } x^2 - 4x + 5 \geq 0 \text{ c'est vrai car } \triangle < 0$$

$$\text{Si } x < 2, |x-2| = 2-x \leq x^2 - 3x + 3$$

$$\text{Donc } x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \text{ c'est vrai}$$

- Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq x^2 - 3x + 3$$

Contraposition

- Une preuve par contraposée prouve une implication $P \Longrightarrow Q$ en prouvant l'énoncé contraposé équivalent $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.
- Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante
- $$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$$
- Donc si l'on souhaite montrer la proposition $P \Longrightarrow Q$
- on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie;

Exemple 1

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que : n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair.
- n impair $\Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$
- On a

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2l + 1$$

- avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.
- Et par suite n^2 est impair
- Conclusion : n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair.

Exemple 2

- Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
- Montrer que :

$$x \neq y \text{ et } xy \neq 1 \Longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

Exemple 2

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Longrightarrow x\left(y^2+y+1\right) = y\left(x^2+x+1\right)$$
$$\Longrightarrow$$

Absurde

- Une preuve par contradiction suppose que l'énoncé à prouver est faux et montre ensuite que cette hypothèse conduit à une contradiction.
- Soit R une proposition. On sait que $R \vee \overline{R}$ est vraie.
- Pour montrer que R est vraie, on suppose que R est fausse i.e $\overline{R}$ est vraie et on montre qu'on obtient une contradiction.
- Si R est une implication, $R \approxeq P \Longrightarrow Q$
- on a $\overline{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
- Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Longrightarrow Q$ repose sur le principe suivant :
- on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.
- Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Exemple 1

- Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b des entiers premiers entre eux $\left(\text{ou la fraction } \dfrac{a}{b} \text{ est irriductible}\right)$.

Exemple 2

- Soit $a, b > 0$.
- Montrer que :
- $$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b$$

Exemple 1

- Supposons que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$
- $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Longrightarrow a\,(1+b) = b\,(1+a)$
- $\Longrightarrow$