1- Logique et raisonnements

Sommaire

- Logique propositionnelle
- Connecteurs logiques
- Quantificateurs mathématiques
- Méthodes de raisonnements

1-1 Proposition (énoncé mathématique)

- La logique mathématique permet l'étude des mathématiques comme un langage.
- La logique mathématique est indispensable pour l'énonciation d'une proposition et l'étude de sa valeur de vérité. Donc, c'est la base de tous les raisonnements mathématiques.
- La logique et les raisonnements constituent la base des mathématiques.
- Dans ce cours, nous explorerons les concepts de base de la logique, la structure des preuves mathématiques et diverses techniques de preuves.

- La logique propositionnelle traite des propositions et de leurs relations logiques.

Définition

- Une proposition (énoncé) est un énoncé mathématique bien précis qui est soit vrai, soit faux, mais pas les deux.
- On note souvent une proposition par des lettres P, Q, R, ...
- Si une proposition P est vraie, on lui attribue la valeur 1 ou **V** (vrai), et si elle est fausse, on lui attribue la valeur 0 ou **F** (faux).
- $P : \begin{cases} \text{vraie} \longrightarrow 1 \text{ ou } V \\ \text{fausse} \longrightarrow 0 \text{ ou } F \end{cases}$
- Table de vérité

P
1
0

ou

P
V
F

Principe de non-contradiction
Une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse.
Principe du tiers exclu
Une proposition est soit vraie, soit fausse, mais il n'y a pas de troisième possibilité.
Exemples

- 374 est divisible par 11 (Proposition vraie) : $374 = 34 \times 11$.
- L'entier naturel 4 est inférieur $(<)$ au nombre réel π (Proposition-fausse) : $\pi \simeq 3,14$.
- $1+\sqrt{2}$ n'est pas une proposition, car cette expression n'a pas de valeur de vérité.
- $x+1>5$ n'est pas une proposition. La valeur de cet énoncé dépend de la variable x.
- Il devient une proposition si on choisit une valeur de x.(cet énoncé est appelé une fonction propositionnelle ou un prédicat).

Définition

- Lorsqu'une proposition dépend d'une ou de plusieurs variables, on l'appelle fonction propositionnelle ou prédicat.

Exemples

- $P(x) : e^x \geq 1$.

Le prédicat $P(x)$ est vrai si $x \geq 0$ et il est faux si $x < 0$.

- $Q(x, y)$: Pour tout nombre réel x, il existe un réel y tel que $y > x$.

Ce prédicat est vrai, car pour tout nombre réel x, on peut choisir $y = x + 1$ tel que $y = x + 1 > x$.

- $R(x, y)$: Il existe un nombre réel x tel que, pour tout nombre réel y, on ait $y > x$.
- Ce prédicat n'est pas vrai, car il est impossible de trouver un nombre réel x tel que tous les autres nombres réels y soient strictement supérieurs à x. Il n'existe pas de plus petit nombre réel, car les nombres réels s'étendent indéfiniment vers des valeurs négatives.

- On est particulièrement intéressé par la combinaison des propositions par des connecteurs (opérateurs) logiques.

Définition

- Une proposition composée est un énoncé obtenu en combinant des propositions avec des connecteurs logiques (opérateurs).

1-2-1 Négation

La négation d'une proposition P est dénotée par **non(P)** ou $\neg P$ ou $\overline{P}$.

- **non(P)** est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.
- Table de vérité :

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

ou

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Remarque

- **non(non(P)) est** P ($\overline{(\overline{P})}$ est P). C'est-à-dire la négation de la négation de la proposition P est P.

Exemples

- P : $|x| < 1$, sa négation est $\overline{P}$: $|x| \geq 1$.
- Q : 4 est **pair**. $\overline{Q}$: 4 n'est pas pair. c'est-à-dire : 4 is **impair**.
- R : Tous les étudiants sont dans la salle de cours.

$\overline{R}$: Il ya un étudiant qui n'est pas dans la salle de cours.

- S : 3 divise 15 **et** divise 81.

$\overline{S}$: 3 ne divise pas 15 **ou** ne divise pas 81.

- T : Si un entier naturel n est un multiple de 4, alors il est pair.

$\overline{T}$: Un entier naturel n est un multiple de 4 et il est impair.

1-2-2 Equivalence $\iff$

- $P \iff Q$: " P est équivalente à Q ", ou " P si et seulement si Q ".
- $P \iff Q$ est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies ou fausses.
- Table de vérité

P	Q	$P \iff Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ou

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- P et Q sont équivalentes si elles ont des tables de vérité identiques.

Exemples

- Pour a, b deux nombres réels, $(a.b = 0) \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
- Pour un entier naturel n, $(n \text{ est pair}) \iff (n^2 \text{ est pair})$.
- Pour des nombres réels a, b et c avec $c \neq 0$,

(L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions réelles) $\iff$ (son discriminant $\triangle = b^2 - 4ac \geq 0$).

1-2 Connecteurs logiques

1-2-3 Conjonction $\wedge$ " et "

- $P \wedge Q$ est la proposition " P **et** Q ".
- Cette fois pour que $P \wedge Q$ soit vraie, il faut que P et Q soient toutes les deux vraies (fause sinon).
- La conjonction de deux propositions est fausse si au moins une de ces propositions est fausse ou si les deux sont fausses.
- Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ou

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarque

- $P \wedge \overline{P}$ est fausse. (Principe de non-contradiction)

P	$\overline{P}$	$P \wedge \overline{P}$
1	0	0
0	1	0

Exemples

- P : 3 est premier, Q : 3 divise 12

$P \wedge Q$: $(3$ est premier$)$ **et** $(3$ divise $12)$. Cette proposition est vraie.

- P : n est un entier naturel pair, Q : n est un entier naturel impair.

$P \wedge Q$: n est un entier naturel pair et impair. Cette proposition est fausse.

- $\overline{P}$: n est un entier naturel impair. Il s'agit de Q.

$P \wedge Q \iff P \wedge \overline{P}$, elle est fausse.

- $x > -1$ **et** $x < 1$ signifie $|x| < 1$.
- $P \wedge Q : x \leq 3$ **et** $x \geq 1$.
- Si $x = 2$ alors $P \wedge Q$ est vraie.
- Si $x = 5$ alors $P \wedge Q$ est fausse.

1-2-4 Disjonction $\vee$ " ou "

- $P \vee Q$ est la proposition " P **ou** Q ".
- $P \vee Q$ est fausse lorsque P et Q sont toutes les deux fausses et est vraie dans le cas contraire.
- La disjonction de deux propositions est vraie si au moins une de ces propositions est vraie.
- Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ou

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque

$P \vee \overline{P}$ est vraie. (Principe du tiers exclu)

1-2 Logical connectives

Examples

- P : 2 n'est pas premier, Q : 2 divise 5.

$P \vee Q$: $(2 \text{ n'est pas premier})$ **ou** $(2 \text{ divise } 5)$. Cette proposition est fausse.

- P : n est un entier naturel pair, Q : n est un entier naturel impair.

$P \vee Q$: n est un entier naturel pair **ou** impair. Cette proposition est vraie.

- $\overline{P}$: n est un entier naturel impair. C'est-à-dire Q.

$P \vee Q \Longleftrightarrow P \vee \overline{P}$, elle est vraie.

- $x < -1$ **ou** $x > 1$ signifie $|x| > 1$.
- $P \vee Q : x \leq 2$ **ou** $x \geq 5$
- Si $x = 1$ alors $P \vee Q$ est vraie.
- Si $x = 3$ alors $P \vee Q$ est fausse.

Remarque **ou exclusive " $\oplus$ "**

- Dans le langage courant, il existe un autre « **ou** » (**exclusive**) noté $\oplus$.
- $P \oplus Q$ est la proposition " P **ou** Q ".
- L'énoncé$P \oplus Q$ est vrai si et seulement si exactement un des énoncés est vrai.
- $P \oplus Q$ est vraie si une seule de ces propositions est vraie et fausse si les deux sont fausses ou vraies simultanément.
- Table de vérité

P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ou

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple

L'étudiant choisit mathématiques ou informatique mais pas les deux.

Lois de De Morgan : Négation de $\wedge$ et $\vee$

$\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$

Preuve par table de vérité

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	0	0	1	**0**	**0**	1	**0**	**0**
1	0	0	1	0	**1**	**1**	1	**0**	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**1**	1	**0**	**0**
0	0	1	1	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**

Définition Tautologie-Antilogie (contradiction)

- Une proposition qui est toujours vraie est appelée une tautologie.
- Une proposition toujours fausse est appelée antilogie ou contradiction.

Exemples

- $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.
- $P \wedge \overline{P}$ est une antilogie ou une contradiction.

1-2-5 Implication $\Longrightarrow$ " Si...alors... "

- C'est un connecteur (opérateur) essentiel en mathématiques, car c'est grâce à lui que les mathématiques progressent. Il nous permet d'énoncer de nouvelles vérités.
- $P \Longrightarrow Q$ est la proposition " P **implique** Q " ou " **Si** P **alors** Q ", qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse et vraie sinon.
- La définition mathématique d'une implication est :

$[P \Longrightarrow Q] \Longleftrightarrow [\overline{P} \vee Q]$

- **Table de vérité**

P	Q	$\overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$
1	1	0	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**0**
0	1	1	**1**	**1**
0	0	1	**1**	**1**

$P \Longrightarrow Q$ et $\overline{P} \vee Q$ ont des tables de vérité identiques.

- P est une condition suffisante pour Q.
- Q est une condition nécessaire pour P.

Exemples

- L'implication $(1 = 2 \Longrightarrow 3 = 4)$ est vraie.
- (En effet, si l'on suppose que $1 = 2$, on obtient $3 = 4$ en ajoutant 2 aux deux côtés de l'égalité.)
- L'implication $[(1 = 2)$ **et** $(4 = 3)] \Longrightarrow [1 + 4 = 2 + 3]$ est vraie.
- (Car si $a = b$ et $c = d$ alors $a + c = b + d$)
- $0 \leq x \leq 100 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 10$. Cette implication est vraie (prener la racine carrée).
- $\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ est fausse (voir pour $x = 2\pi$).

Remarque

$[P \Longleftrightarrow Q] \Longleftrightarrow [P \Longrightarrow Q] \wedge [Q \Longrightarrow P]$

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$[P \Longrightarrow Q] \wedge [Q \Longrightarrow P]$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	1	**0**	**0**
0	1	1	0	**0**	**0**
0	0	1	1	**1**	**1**

Négation d'une implication

- On sait que $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\overline{P} \vee Q\right)$ (définition de $\Longrightarrow$)
- donc, $\left(\overline{P \Longrightarrow Q}\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{\overline{P} \vee Q}\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{\left(\overline{P}\right)} \wedge \overline{Q}\right)$ (lois de De Morgan).
- Ainsi $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow \left(P \wedge \overline{Q}\right)$.

Exemples

Soient a et b deux nombres réels.

- $R : [(a = 0)\ \text{ ou }\ (b = 0)] \Longrightarrow a.b = 0$ est vraie.

$\overline{R} : [(a = 0)\ \text{ ou }\ (b = 0)]$ **et** $a.b \neq 0$ est fausse.

- $S : a^2 > 0 \Longrightarrow a > 0$ est fausse $(a = -2 : a^2 = 4 > 0$).

$\overline{S} : \left(a^2 > 0\right)$ **et** $(a \leq 0$) est vraie.

- T : n est impair $\Longrightarrow n^2$ est impair. (n est un entier naturel) est vraie.

$\overline{T}$: (n est impair) **et** (n^2 est pair) est fausse.

Inverse d'une implication

- L'implication " $Q \Longrightarrow P$ " est appelée l'inverse de " $P \Longrightarrow Q$ ".

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$
1	1	1	1
1	0	**0**	**1**
0	1	**1**	**0**
0	0	1	1

- $Q \Longrightarrow P$ n'est pas équivalente à $P \Longrightarrow Q$

Exemple

Soit x un nombre réel.

- $x > 5 \Longrightarrow x > 1$ est vraie, mais
- $x > 1 \Longrightarrow x > 5$ est fausse (par exemple $x = 2$)
- $x^2 > 4 \Longrightarrow x > 2$ est fausse, puisque pour $x = -3$ o a $(-3)^2 = 9 > 4$ et $x = -3 < 2$
- Mais, $x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$ est vraie.

Contraposée d'une implication

Soient P et Q deux propositions.

- " $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ " est appelée la contraposée de" $P \Longrightarrow Q$ ".

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	**1**	**1**
1	0	0	1	**0**	**0**
0	1	1	0	**1**	**1**
0	0	1	1	**1**	**1**

$P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.

- $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}) \Longleftrightarrow (P \Longrightarrow Q)$

Exemples

Soient a, b deux nombres réels et n un entier naturel.

- $[(a = 0 \textbf{ ou } b = 0) \Longrightarrow (a.b = 0)] \Longleftrightarrow$ $[(a.b \neq 0) \Longrightarrow (a \neq 0 \textbf{ et } b \neq 0)]$
- $[(n \neq 2 \textbf{ et } n \text{ est premier}) \Longrightarrow n \text{ est impair}] \Longleftrightarrow$ $[n \text{ pair} \Longrightarrow (n = 2 \textbf{ ou } n \text{ n'est pas premier})]$

1-2 Connecteurs logiques

A retenir

- $\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$ (Lois de De Morgan).
- $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$ (Lois de De Morgan).
- $(P \implies Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$ (définition de $\implies$)
- $\overline{(P \implies Q)} \iff (P \wedge \overline{Q})$ (négation de $\implies$)
- $(\overline{Q} \implies \overline{P}) \iff (P \implies Q)$ (contraposée de $\implies$)
- $(Q \implies P)$ **n'est pas équivalente à** $(P \implies Q)$ (inverse de $\implies$)
- $[P \iff Q] \iff [P \implies Q] \wedge [Q \implies P]$

Propriétés des connecteurs logiques

- $\overline{(\overline{P})} \iff P, \quad P \wedge Q \iff Q \wedge P, \quad P \vee Q \iff Q \vee P$
- $(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$, $P \wedge P \iff P, \quad P \vee P \iff P$
- $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$
- $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$
- $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- $(P \Longrightarrow Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$
- $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \iff (P \wedge \overline{Q})$
- $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}) \iff (P \Longrightarrow Q)$
- $[P \iff Q] \iff [P \Longrightarrow Q] \wedge [Q \Longrightarrow P]$
- $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$
- $P \wedge \overline{P}$ est fausse, $P \wedge F$ est fausse où F est fausse.
- $P \vee \overline{P}$ est vraie, $P \vee V$ est vraie où V est vraie.

1-3 Quantificateurs mathématiques

- En mathématiques, on utilise souvent des expressions de la forme :

" **pour tout** ", " **quelque soit** "," **il existe au moins** ",
" **il existe un unique** "

- Ces expressions sont appelées « **quantificateurs** ».
- Le mot **quantificateur** vient du mot **quantité**.

1-3 Quantificateurs mathématiques

- Il existe deux types de **quantificateurs:**

Quantificateur universel $\forall$

- $\forall x \longrightarrow$ pour tout x ou quel que soit x.
- $\forall x,\ P(x)$: signifie que le prédicat $P(x)$ est vrai pour toutes les valeurs possibles de x.

Quantificateur existentiel $\exists$

- $\exists x \longrightarrow$ **il existe** x (**il existe au moins** x).
- $\exists x,\ P(x)$: signifie qu'**il existe** x où $P(x)$ est vraie.
- Parfois, on utilisera aussi $\exists!\ x,\ P(x)$.
- Cela signifie qu'il existe un x unique où $P(x)$ est vraie.

1-3 Quantificateurs mathématiques

- On considère l'énoncé $\forall x,\ P(x)$.
- Cela affirme que $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x.
- Ainsi, s'il est faux, alors cela signifie qu'il existe au moins un x tel que $P(x)$ est fausse.
- De la même manière, l'énoncé, $\exists x,\ P(x)$, affirme qu'il existe au moins un x où $P(x)$ est vraie.
- Ainsi, s'il est faux, cela signifie que pour toutes les valeurs de x, $P(x)$ est fausse. C'est à dire $\overline{P(x)}$ est vraie.
- Nous avons donc ce qui suit :

$$\overline{\forall x, P(x)} \iff \exists x, \overline{P(x)}$$
$$\overline{\exists x, P(x)} \iff \forall x, \overline{P(x)}$$

Exemples

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ vraie
- Pour tout nombre réel x, son carré est supérieur ou égal à zéro.
- La négation de cette proposition est :
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ fausse
- Il existe un nombre réel x dont le carré est inférieur à zéro.
- $\exists!\ n \in \mathbb{N}$ tel que $n < 1$ vraie $(n = 0)$
- Il existe un nombre naturel unique n, inférieur à un.

Remarque 1

- Certains énoncés dépendent de plusieurs quantificateurs.
- L'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y > x.$ $\quad$ (*vrai*)
- Il signifie que pour tout nombre réel x, il existe au moins un nombre réel y, qui est supérieur à x.
- Cet énoncé est vrai (pour $x \in \mathbb{R}$, on peut choisir $y = x + 1 > x$) .
- L'ordre des quantificateurs est très important.
- L'énoncé : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y > x.$ $\quad$ (*faux*)
- Il n'existe pas de nombre réel supérieur à tous les autresnombres réels.

Remarque 2

- $\forall x, \exists y,\ P(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y, \forall x,\ P(x,y)$

  n'est pas équivalent à

- $\exists x, \forall y,\ P(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y, \exists x,\ P(x,y)$

  n'est pas équivalent à

- $\forall x, \forall y,\ P(x,y) \Longleftrightarrow \forall y, \forall x,\ P(x,y)$

  est équivalent à

- $\exists x,\ \exists y,\ P(x,y) \Longleftrightarrow \exists y,\ \exists x,\ P(x,y)$

  est équivalent à

- $\overline{\forall x, \exists y, P(x,y)} \Longleftrightarrow \exists x, \forall y,\ \overline{P(x,y)}$
- $\overline{\exists x, \forall y, P(x,y)} \Longleftrightarrow \forall x, \exists y,\ \overline{P(x,y)}$

Négation de il existe un unique

- Négation de $\exists! x \in E$

$$[\exists! x \in E, P(x)] \iff$$
$$\underbrace{[\exists x \in E, P(x)]}_{Existence} \textbf{ et } \underbrace{[\forall x, x' \in E, (P(x) \text{ et } P(x') \Longrightarrow x = x')]}_{unicit\acute{e}}$$

- Alors

$$\overline{[\exists! x \in E, P(x)]} \iff$$
$$\overline{[\exists x \in E, P(x)]} \textbf{ou} \overline{[\forall x, x' \in E, (P(x), P(x') \Longrightarrow x = x')]}$$
$$\overline{[\exists! x \in E, P(x)]} \iff$$
$$\left[\forall x \in E, \overline{P(x)}\right] \textbf{ ou } [\exists x, x' \in E, (P(x), P(x') \textbf{ et } x \neq x')]$$

Exemple

- $\exists! x \in \mathbb{R}, \ln x = 1$ est **vraie** $\left(\ln e = 1 \text{ et } x = e \text{ est unique}\right)$
- $\overline{[\exists! x \in \mathbb{R}, \ln x = 1]} \Longleftrightarrow$
- $[\forall x \in \mathbb{R}, \ln x \neq 1]$ **ou** $[\exists x, x' \in \mathbb{R}, (\ln x = 1 = \ln x' = 1 \textbf{ et } x \neq x')]$

  FAUX **FAUX**

- C'est-à-dire $\overline{[\exists! x \in \mathbb{R}, \ln x = 1]}$ est **FAUSSE**