UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID
TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Epreuve de synthèse en Processus Stochastique

17 janvier 2024

Exercice 1 *Nous considérons un joueur dont la probabilité de donner une bonne réponse est p quelque soit la question posée et la probabilité de donner une réponse fausse est $1-p$, avec $0 < p < 1$. Nous supposons que les réponses sont indépendantes les unes des autres et que s'il donne une bonne réponse, il gagne 1 et s'il donne une mauvaise réponse, il perd tout. La richesse de départ est $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, on note X_n sa fortune à l'instant n.*

Soit Y_n une suite de variables aléatoires iid qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p indépendantes de X_0, la chaîne de Markov X_n est définie ainsi ;

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & si\ Y_{n+1} = 1 \\ 0 & si\ Y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

1) Donner le graphe et la matrice de transition.
2) Montrer que la chaîne est irréductible.
3) Soit T_0 le temps d'atteinte de 0, calculer $P_0(T_0 = n)$.
4) En déduire que la chaîne est récurrente.
5) Quelle est la période de la chaîne ?.
6) Trouver une distribution stationnaire pour cette chaîne.
7) En déduire que cette chaîne est récurrente positive et calculer le temps de retour moyen à 0 sachant qu'elle part de 0.
8) Calculer la limite de $\mathcal{P}^n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 *Le but du problème est de comparer deux types de files d'attente à deux serveurs. Dans le premier cas, les clients forment une seule file et choisissent le premier serveur qui se libère (file $M|M|2$). On suppose que les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ et qu'ils sont servis pendant un temps exponentiel de paramètre $\mu = \lambda$.*
1) Déterminer la distribution Π de la file.
2) Quelle est la probabilité qu'un client ne doive pas attendre avant d'être servi ?
3) Quel est le temps d'attente moyen avant d'être servi ?

4) Soit S le nombre de serveurs occupés, déterminer $E_{\Pi}(S)$.
Dans le second cas, il y une file distincte devant chaque serveur, les clients choisissent une file ou l'autre avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
Du point de vue client, ce cas est équivalent à une file $M|M|1$ avec les taux $\frac{\lambda}{2}$ et λ.
5) Quelle est la probabilité qu'un client ne doive pas attendre avant d'être servi ?
6) Quel est le temps d'attente moyen avant d'être servi ?
7) Comparer les deux systèmes du point de vus client.

UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID
TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Corrigé de l'epreuve de synthèse en Processus Stochastique

23 janvier 2024

Exercice 1 *1) la matrice de transition*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & ... \\ 1-P & 0 & p & 0 & ..... \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p \\ ... & ... & .. & .. & .. \end{pmatrix} \quad (1pt)$$

graphe (1pt).
2) Montrons que pour tout les états communiquent ; soient $x, y \in \mathbb{N}$ *;*
Si $y > x$*, nous pouvons atteindre* y *en gagnant* $y - x$ *fois successivement ;* $\mathcal{P}^{y-x}(x, y) = p^{y-x}$*. (1 pt)*
Si $y < x$*, nous pouvons atteindre* y *en perdant immédiatement et gagner* y *fois pour atteindre la fortune* y *;* $\mathcal{P}^{y+1}(x, y) = (1-p)p^y$*. (1 pt)*
La chaîne est irréductible.
3) $\mathbb{P}_0(T_0 = n) = \mathbb{P}_0(Y_1 = 1, Y_2 = 1, ..., Y_{n-1} = 1, Y_n = 0) = p^{n-1}(1-p)$*. (1 pt)*
4)$\mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_0(T_0 = n) = (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = \frac{1-p}{1-p} = 1$.
donc 0 est récurrent, alors la chaîne est récurrente. (2 pt)
5)la période de l'état 0 ; on a $p_{00} = 1-p > 0$*, 0 est apériodique, alors la chaîne est apériodique. (1 pt)*
6) Soit Π *une distribution stationnaire, après calcul ;* $\Pi(n) = (1-p)p^n$*. (1 pt)*
7) La loi stationnaire existe et la chaine est irréductible, récurrente, donc elle est récurrente positive et

$$\mathbb{E}_0(T_0) = \frac{1}{\Pi(0)} = \frac{1}{1-p}$$

(1 pt).
8) $\lim_{n \to +\infty} \mathcal{P}^n(x, y) = \Pi(y) = (1-p)p^y$

on aura alors la limite de la matrice stochastique ;

$$\begin{pmatrix} 1-p & (1-p)p & (1-p)p^2 & (1-p)p^3 & ... \\ 1-P & (1-p)p & (1-p)p^2 & (1-p)p^3 & ..... \\ 1-p & (1-p)p & (1-p)p^2 & (1-p)p^3 & .. \\ 1-p & (1-p)p & (1-p)p^2 & (1-p)p^3 & .. \\ ... & ... & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

(2 pt)

Exercice 2 *1) la distribution d'une file* $M|M|2$ *est* $\Pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, ...)$. *(1 pt)*
2) $\mathbb{P}(W=0) = \Pi(0) + \Pi(1) = \frac{2}{3}$. *(1 pt)*
3) W_1 *le temps d'attente moyen, formule de Little* $W_1 = \frac{L}{\lambda}$,
$L = \mathbb{E}(N) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda s\mu}{(s\mu-\lambda)^2}\Pi(2)$ *:nombre moyen de clients dans le système.*
$W = \frac{1}{3\lambda}$. *(1 pt)*
4) le nombre moyen de serveur occupé est $\frac{\lambda}{\mu} = 1$. *(1 pt)*
5) $\mathbb{P}(W=0) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda/2}{\lambda}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda/2}{\lambda}) = \frac{1}{2}$. *(2 pt)*
6) Le temps d'attente moyen,$W_2 = \frac{2}{\lambda}$ *(le temps d'attente suit une loi* $\mathcal{E}(\lambda/2)$*).(1 pt)*
7) $W_1 < W_2$, *le premier système est meilleure que le second du point de vue client. (1 pt)*