Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2023/2024.
Janvier 2024.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

Epreuve finale

(2 heures)

Questions de cours

1) L'intervalle $]0,T[$ $(T<+\infty)$ et le domaine Ω étant des ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$, montrer que $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(]0,T[\times\Omega)$. $\boxed{1pt}$

2) V et H étant deux $\mathbb{R}$-espaces de Hilbert t.q. $V\subset H$ (avec injection continue), montrer alors que $L^2(0,T;V)\subset L^2(0,T;H)$ (avec injection continue). $\boxed{1pt}$

Problème

Ω ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$, on pose $Q=\Omega\times]0,T[$ $(T<+\infty)$ et $\Sigma=\Gamma\times]0,T[$ où $\Gamma=\partial\Omega$, $V=H_0^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$ et $V'=H^{-1}(\Omega)$

$$\begin{cases}(a) & \dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y = f+v \ \text{ ds } Q\\ (b) & y=0 \quad \text{sur } \Sigma\\ (c) & y(x,0)=y_0(x)\ \ \forall x\in\Omega\end{cases}$$

Hypothèses : $V\hookrightarrow H\hookrightarrow V'$ $\left[L^2(0,T;V')=L^2(0,T;V)'\right]$
$f\in L^2(0,T;V')$, $v\in \underbrace{\mathcal{U}_{ad}}_{\text{convexe fermé}} \subset L^2(0,T;H)=L^2(Q)$
$A=-\Delta\in\mathcal{L}(V,V')$
$y_0\in H=L^2(\Omega)$.

(d) $J(v)=\frac{1}{2}\left[\alpha\int_Q (y(v)-z_d)^2\,dx\,dt+\beta\int_Q v^2(x,t)\,dx\,dt\right]$ avec $\alpha,\beta>0$ et $z_d\in L^2(Q)$.

Rappel : $\int_Q g(x,t)\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega g(x,t)\,dx\,dt$. $(T<+\infty)$

① Ecrire la formulation variationnelle associée au système "(a), (b), (c)": $\boxed{1.5pts}$

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial t}(t),\varphi\right\rangle_{V',V}+a(y(t),\varphi)=\langle F(t),\varphi\rangle_{V',V}\quad \forall\varphi\in V\ \ \forall t\in]0,T[$$

après avoir déterminé la forme bilinéaire "a" et la forme linéaire "F."
où $F\in L^2(0,T;V')$ [F définit la forme lin. $L\in V'$ t.q. $L(\varphi)=\langle F,\varphi\rangle_{V',V}\ \forall\varphi\in V$]

② Montrer que le pb défini par "(a), (b), (c)" est bien posé au sens d'Hadamard. $\boxed{2pts}$

Rappel : Le pb (a, b, c) est bien posé au sens d'Hadamard s'il admet une solution unique $y\in W(0,T)$ et si cette solution est continue par rapport aux données : f, v et y_0 c.à.d. $\exists K>0$ t.q. $\|y\|_{W(0,T)}\leqslant K\left(\|f\|_{L^2(0,T,V')}+\|v\|_{L^2(Q)}+|y_0|_H\right)$

Indication : On pourra utiliser le thm existentiel (vu en cours) :
Le pb (1) $\begin{cases}\partial y/\partial t + Ay = g \ \text{ ds }]0,T[\\ y(0)=y_0\end{cases}$ admet une sol. unique $y\in W(0,T)$ et cette solution dépend continûment des données si les conditions svtes sont vérifiées :
On cherche $y\in L^2(0,T;V)$
(i) Pivotation $V\hookrightarrow H\hookrightarrow V'$ (ii) $g\in L^2(0,T;V')$ où $T<+\infty$ (iii) $y_0\in H$ (iv) $A\in\mathcal{L}(V,V')$
(v) Si $a(\varphi,\psi)=\langle A\varphi,\psi\rangle_{V',V}$ $\forall\varphi,\psi\in V$ alors "a" est continue sur $V\times V$ et enfin

…/…

(vi) "a" coercitive c.à.d. $\exists \lambda_a \geq 0$ et $\alpha_a > 0 / \forall \varphi \in V \; a(\varphi,\varphi) + \lambda_a |\varphi|_H^2 \geq \alpha_a \|\varphi\|_V^2$.

(3) Montrer que l'application $v \mapsto y(v)$ est affine et continue de $L^2(Q)$ ds $W(0,T)$. (3.5 pts)

(4) Montrer que $(\mathcal{P})$: $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ admet une solution optimale unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$. (5.5 pts)

Indication: Pour l'étude de la convexité, utiliser directement le résultat suivant: Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $J_{\mathcal{H}}(v) = \frac{1}{2}\|y(v) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 \; \forall v \in \mathcal{U}$ ($\mathbb{R}$-esp. Hilbert) alors $\langle J'_{\mathcal{H}}(v), w - v\rangle_{\mathcal{U}} = \langle y(v) - z_d, y(w) - y(v)\rangle_{\mathcal{H}} \; \forall v, w \in \mathcal{U}$.

(5) Etant donné le système de l'état adjoint :

$$\begin{cases} (a^*) & -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \alpha\,(y(v) - z_d) & \text{ds } Q \\ (b^*) & p = 0 & \text{sur } \Sigma \\ (c^*) & p(T) = 0_H & \end{cases}$$

(2 pts)

Montrer que le système "$(a^*), (b^*), (c^*)$" admet une solution unique $p \in W(0,T)$

(6) Exprimer $\langle J'(u), v-u\rangle$ en fonction de l'état adjoint p, le contrôle optimal u et le coefficient β du coût de la fonctionnelle J. (2 pts)

(7) Ecrire le système d'optimalité regroupant le système de l'état direct, le système de l'état adjoint et l'inéquation d'Euler. (1.5 pts)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2023/2024.
Janvier 2024.
Contrôle optimal_EDP (Master2-EDP_S3)

Corrigé de l'épreuve finale

Questions de cours

1) $y \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \iff \|y\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T \|y(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T\int_\Omega y^2(x,t)\,dx\,dt$
$= \int_{]0,T[\times\Omega = Q = \Omega\times]0,T[} y^2(x,t)\,dx\,dt = \|y\|^2_{L^2(Q)} < +\infty$ (1pt)

$\iff y \in L^2(Q)$.

$(x,t) \in \Omega \times]0,T[= Q =]0,T[\times\Omega \ni (t,x)$ où $T<+\infty$

2) $V \subset H$ avec injection continue $\Rightarrow \exists C_V > 0 / \forall v \in V\ |v|_H \leq C_V \|v\|_V$.

Donc si $z \in L^2(0,T;V)$ alors $\forall t \in]0,T[\ z(t) \in V \subset H$ avec inj. cont. et on a :
$|z(t)|_H \leq C_V \|z(t)\|_V\ \forall t \in]0,T[\Rightarrow \int_0^T |z(t)|^2_H dt \leq C_V^2 \int_0^T \|z(t)\|^2_V dt < +\infty$
(car $z \in L^2(0,T;V)$) $\Rightarrow z \in L^2(0,T;H)$. Donc $\|z\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_V \|z\|_{L^2(0,T;V)}$ $\forall z \in L^2(0,T;V)$

On en conclut alors que $L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;H)$ avec inj. cont. (1pt)

Problème

Etant donné le pb parabolique suivant avec $V = H^1_0(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} (a)\ \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + v \text{ ds } Q = \Omega\times]0,T[\ (T<+\infty) \text{ avec } f \in L^2(0,T;V')\ V' = H^{-1}(\Omega) \\ (b)\qquad y = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma\times]0,T[\ (\Gamma = \partial\Omega) \qquad v \in L^2(Q) = L^2(0,T;H) \\ (c)\qquad y(x,0) = y_0(x)\ \forall x \in \Omega \text{ (ouvert borné régulier de } \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

On a aussi $V = H^1_0(\Omega) \hookrightarrow H = L^2(\Omega) \hookrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$, $A = -\Delta \in \mathcal{L}(V,V')$ et on rappelle que $L^2(0,T;V)' = L^2(0,T;V')$. On cherche alors $y(v)$ dans $L^2(0,T;V)$ vérifiant "(a), (b), (c)". Ce qui revient à dire que l'on cherche $y(v)$ dans $L^2(0,T;V)$ vérifiant le pb équivalent svt : $\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f+v \text{ ds }]0,T[& (a') \\ y(0) = y_0 \in H & (c') \end{cases}$

(La condition de Dirichlet homogène :
$y = 0$ sur $\Sigma \iff y(x,t) = 0\ \forall x \in \Gamma\ \forall t \in]0,T[$ est intégrée ds le choix de $y \in L^2(0,T;V) = L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$).

① On reprend alors l'équation (a) et on multiplie les 2 membres de (a) par $\varphi \in V = H^1_0(\Omega)$. Ensuite, on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega \Delta_x y(x,t).\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega v(x,t)\varphi(x)\,dx$$

$$\iff \int_\Omega \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \nabla_x y(x,t).\nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial y(x,t)}{\partial \vec{n}_x}\varphi(x)\,d\sigma(x) = \int_\Omega f(x,t)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega v(x,t)\varphi(x)\,dx$$

Or $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \vec{n}_x}(x,t)\varphi(x)\,d\sigma(x) = 0$ car $\varphi \in V = H^1_0(\Omega)$

$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial y(t)}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{V',V} + a(y(t),\varphi) = \int_\Omega f(t)\varphi\, dx + \int_\Omega v(t)\varphi\, dx \quad \forall t \in]0,T[\ \forall \varphi \in V$ (0,5pt)

où $a(\varphi,\psi) = \int_\Omega \nabla\varphi . \nabla\psi\, dx \ \forall \varphi,\psi \in V = H_0^1(\Omega)$ et F définit la forme linéaire $L \in V'$ t.q. $L(\varphi) = \langle F,\varphi\rangle_{V',V}$ c.à d. $L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_\Omega v\varphi\, dx$

c.à d. $\langle F(t),\varphi\rangle_{V',V} = \langle f(t),\varphi\rangle_{V',V} + \langle v(t),\varphi\rangle_{H=L^2(\Omega)} \ \forall t \in]0,T[\ \forall\varphi\in V$ (1pt)

② Comme dans l'indication de la question ② du sujet et pour montrer que le pb "(a),(b),(c)" est bien posé au sens d'Hadamard, il suffit de vérifier si ses données respectent les hypothèses indiquées ds la question ② du sujet : (i) – (vi) (de (i) à (vi)) :

Ces hypothèses sont ttes déjà vérifiées sauf les deux dernières (v) et (vi) qu'il faudra démontrer :

(v) $|a(\varphi,\psi)| \leqslant \int_\Omega |\nabla\varphi||\nabla\psi|\, dx \leqslant \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^n} . \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^n} = \|\varphi\|_V . \|\psi\|_V$

(1pt) Donc "a" continue sur $V\times V$ avec $C_a = 1$ (const. cont.) $\forall\varphi,\psi\in V = H_0^1(\Omega)$

(vi) $\forall\varphi\in V = H_0^1(\Omega)$ $a(\varphi,\varphi) = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^n} = \|\varphi\|^2_{V=H_0^1(\Omega)}$

(1pt) $\Rightarrow a(\varphi,\varphi) + |\varphi|^2_{L^2(\Omega)=H} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |\varphi|^2_{H=L^2(\Omega)} \geqslant \|\varphi\|^2_V$

Donc "a" est coercitive avec $\lambda_a = \alpha_a = 1$ et (vi) est vérifiée.

③

$y(v) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1}(f+v) = \left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)^{-1} f + \left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)^{-1} v$ ds $]0,T[$ (l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)$ qui est linéaire étant inversible sur $\{z\in L^2(0,T;V) / z(0) = y_0\}$),

alors on peut définir l'opérateur $\mathcal{A} : L^2(0,T;V') \longrightarrow L^2(0,T;V)$ t.q. $v \longmapsto \mathcal{A}v$

$\mathcal{A}v = \begin{cases} (\partial/\partial t + A)^{-1} v & \text{ds }]0,T[\\ 0v = 0 & \text{si } t=0 \end{cases}$ Rem. (On rappelle ici que $A = -\Delta$)

Ici, j'accepte $\mathcal{A} : L^2(0,T;H) \to L^2(0,T;V)$

Tout ce qui ne dépend pas de v ds l'expression de $y(v)$, on le regroupe ds l'expression de $\mathcal{B} \in L^2(0,T;V)$ t.q. $\mathcal{B} = \begin{cases} (\partial/\partial t + A)^{-1} f & \text{ds }]0,T[\\ y_0 & \text{si } t=0 \end{cases}$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire car l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)^{-1}$ est lin. de $L^2(0,T;V')$ dans $L^2(0,T;V)$ puisque c'est l'opérateur inverse de $\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)$ lin. de $L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V')$.
Donc sur $]0,T[$ $\mathcal{A} = (\partial/\partial t + A)^{-1} : L^2(0,T;V') \to L^2(0,T;V)$.
En $t=0$ $\mathcal{A}$ est l'opérateur nul qui est lin. aussi.

c.à d. $\mathcal{B}(t) = (\partial/\partial t + A)^{-1} f(t) \ \forall t\in]0,T[$ et $\mathcal{B}(0) = y_0$ ($\mathcal{B}\in L^2(0,T;V)$ de m̂ nature que y)

Conclusion : l'application $v \mapsto y(v)$ affine % à v puisque $y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ (ds $]0,T[$).

(1pt) par $\mathcal{A}$ et (1pt) par $\mathcal{B}$

Pour montrer, à présent, que l'application affine y % à v est cont. sur $L^2(0,T;H)$, il suffit de m.q. l'application affine $v \mapsto y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ est continue. Ce qui revient à m.q. l'application linéaire $v \mapsto y_{hom}(v) = \mathcal{A}v$ est continue sur $L^2(0,T;H)$ c.à d. montrer qu'il existe une const. $C_{\mathcal{A}} > 0$ / $\forall v \in L^2(0,T;H)$ on ait $\|\mathcal{A}v\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_{\mathcal{A}} \|v\|_{L^2(0,T;H)}$. On se rappelle alors que $y(v)$ est solution unique du pb (a,b,c) et cette solution dépend continûment des données du pb qui sont dans notre cas : $f + v \in L^2(0,T;V')$ et $y_0 \in H$ (Voir, pour cela, le thm existentiel rappelé à la question ②). Ce qui ns permet d'écrire :

$$\exists K > 0 / \ \|y(v)\|_{W(0,T)} \leq K \left(\|f + v\|_{L^2(0,T;V')} + |y_0|_H\right)$$

0,5pt

$$\leq K \left(\|f\|_{L^2(0,T;V')} + \|v\|_{L^2(0,T;H)} + |y_0|_H\right)$$

Lorsque $y_{hom}(v) = \mathcal{A}v$ ($\mathcal{B} = 0_{L^2(0,T;V)} \Leftrightarrow f = 0_{L^2(0,T;V')}$ et $y_0 = 0_H$) alors, dans ce cas, y_{hom} sera la solution unique du système homogène (1_{hom}) :

$$(1_{hom}) \begin{cases} \dfrac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = v & \text{ds }]0,T[\\ y(0,v) = 0_H \end{cases}$$

0,5pt

Ds ce cas, la continuité de la solution $y_{hom}(v)$ de (1_{hom}) par rapport aux données (v uniquement) est exprimée par l'inégalité suite : $\|y_{hom}(v)\|_{W(0,T)} \leq K \|v\|_{L^2(0,T;H)}$

0,5pt

c.à d. $\|\mathcal{A}v\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_{\mathcal{A}} \|v\|_{L^2(0,T;H)}$

où $C_{\mathcal{A}} = K$ (const. de cont. de $\mathcal{A}$).

④ (P) : Trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ t.q. $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$. Ce pb d'optimisation avec contrainte admet une sol. optimale unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$ ssi J est continue, strictement convexe et infinie à l'∞.

ⓘ Continuité de J : $J(v) = \dfrac{1}{2}\left(\alpha \|y(v) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \beta \|v\|^2_{L^2(Q)}\right)$ avec $\alpha, \beta > 0$ et $z_d \in L^2(Q)$

L'application $v \mapsto y(v) \in L^2(0,T;V)$ continue V. la question ③ puisque : $\|y\|_{L^2(0,T;V)} \leq \|y\|_{W(0,T)}$ par construction même de la norme ds $W(0,T)$.

$\Rightarrow v \mapsto y(v)$ continue dans $L^2(0,T;H) \supset L^2(0,T;V)$ avec inj. continue :

$\exists C_V > 0 / \ \|y(v)\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_V \|y(v)\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_V \|y(v)\|_{W(0,T)}$.

D'où la continuité de $v \mapsto \|y(v) - z_d\|^2_{L^2(0,T;H) = L^2(Q)}$ puisque c'est une composée de fonctions continues ; $t \in \mathbb{R} \mapsto t^2 \in \mathbb{R}^+$ et la fction norme. On rappelle aussi que z_d est cont. % à v puisque z_d est constante % à v.

1pt

L'application $v \in L^2(Q) \mapsto \|v\|^2_{L^2(Q)}$ est également continue % à v puisque c'est aussi une composée d'applications continues : l'application "carré" et l'application norme. J est finalement, une combin. lin. de fctions continues.

0,5pt

(ii) Convexité de J : $J(v) = \frac{1}{2}\left[\alpha \|y(v) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \beta \|v\|^2_{L^2(Q)}\right]$

Utilisant l'indication de la question (4) concernant l'étude de la convexité :

$$\langle J'(v), w-v\rangle_{L^2(Q)} = \alpha \langle y(v) - z_d, y(w) - y(v)\rangle_{L^2(Q)} + \beta \langle v, w-v\rangle_{L^2(Q)} \quad (a) \quad 0.5pt$$

$$\langle J'(w), w-v\rangle_{L^2(Q)} = \alpha \langle y(w) - z_d, y(w) - y(v)\rangle_{L^2(Q)} + \beta \langle w, w-v\rangle_{L^2(Q)} \quad (b) \quad 0.5pt$$

où l'on a utilisé le fait que si $\ell(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)} = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_{L^2(Q)}$ alors :

$$\langle \ell'(v), w\rangle_{L^2(Q)} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\left(\ell(v+\theta w) - \ell(v)\right) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2}\langle v+\theta w, v+\theta w\rangle - \frac{1}{2}\langle v, v\rangle\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{2\theta}\left(\cancel{\langle v, v\rangle} + 2\theta\langle v, w\rangle + \theta^2\langle w, w\rangle - \cancel{\langle v, v\rangle}\right) = \langle v, w\rangle \quad 0.5pt$$

$\Rightarrow \langle \ell'(v), w-v\rangle = \langle v, w-v\rangle_{L^2(Q)}$. Faisons la différence entre (b) et (a), on obtient :

$$\langle J'(w) - J'(v), w-v\rangle = \alpha\langle y(w) - y(v), y(w) - y(v)\rangle_{L^2(Q)} + \beta\langle w-v, w-v\rangle_{L^2(Q)} \quad 0.5pt$$

$$= \alpha \|y(w) - y(v)\|^2_{L^2(Q)} + \beta\|w-v\|^2_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v, w \in L^2(Q)$$

De plus si $v \neq w$ alors

$\langle J'(w) - J'(v), w-v\rangle \geq \beta\|w-v\|^2_{L^2(Q)} > 0 \Rightarrow J$ est strict. convexe sur $L^2(Q)$. 1pt

(iii) Coercivité de J :

$J(v) \geq \frac{\beta}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)} \longrightarrow +\infty$ qd $\|v\|_{L^2(Q)} \to \infty$. Donc J coercive. 1pt

Conclusion : le pb (P) admet une solution optimale unique $u \in U_{ad}$.

(5) Comme pour le pb "(a), (b), (c)", le pb "$(a^*), (b^*), (c^*)$" est, également, équivalent à

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \alpha(y(v) - z_d) & \text{ds } Q = \Omega \times]0,T[\quad (a^{*\prime}) \\ p(T) = 0_H & (c^{*\prime}) \end{cases}$$

où l'on cherche p dans $L^2(0,T;V)$ où $V = H^1_0(\Omega) \Rightarrow p(x,t) = 0 \ \forall x \in \Gamma = \partial\Omega$ c.à.d. $p = 0$ sur $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$. $\forall t \in]0,T[$

En faisant le changement de variable : $t' = T - t \in [0,T]$ si $t \in [0,T]$, on peut reformuler le pb "$(a^{*\prime}), (c^{*\prime})$" sous la forme suivante (avec condition initiale au lieu d'1 condition finale) :

$$\begin{cases} (a^{**}) & \frac{\partial p}{\partial t'} - \Delta p = \alpha(y(v) - z_d) \quad \text{ds }]0,T[\\ (c^{**}) & p(0) = 0_H \end{cases} \quad 1pt$$

Le pb "$(a^{**}), (c^{**})$" est du même type que le pb "(a), (b), (c)" qui est bien posé au sens d'Hadamard (c.à.d. il admet une sol. unique). Il suffit donc de vérifier que le second membre de (a^{**}) se trouve bien dans l'espace $L^2(0,T;V')$. En effet, $y(v) \in W(0,T) \subset L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;H)$ et $z_d \in L^2(Q) = L^2(0,T;H) \Rightarrow y(v) - z_d$ se trouve dans $L^2(0,T;H) \subset L^2(0,T;V')$ (puisque $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$) $\Rightarrow \alpha(y(v) - z_d) \in L^2(0,T;V')$. 1pt

Conclusion : Le pb "$(a^{**}), (c^{**})$" est bien posé au sens d'Hadamard $\Rightarrow$ le pb "(a^*, b^*, c^*)" l'est aussi et, par suite, admet une solution unique $p \in W(0,T)$.

⑥ On a déjà vu ds la question ④ que : $\langle J'(u), v-u\rangle_{L^2(Q)} = \alpha\langle y(u)-z_d, y(v)-y(u)\rangle_{L^2(Q)} + \beta\langle u, v-u\rangle_{L^2(Q)}$.

Or d'après le système de l'état adjoint (V. (a*)), on a $\alpha(y(u)-z_d) = -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p$. Donc, on peut écrire :

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \left\langle -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, y(v)-y(u)\right\rangle_{L^2(0,T;V'), L^2(0,T;V)} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} \quad (0,25)$$

Δ auto-adjoint ⇒ −Δ aussi

$$\stackrel{\downarrow}{=} -\left\langle \frac{\partial p}{\partial t}, y(v)-y(u)\right\rangle_{V_T', V_T} + \langle p, -\Delta(y(v)-y(u))\rangle_{V_T, V_T'} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)}$$

où l'on a posé $V_T' = L^2(0,T;V')$ et $V_T = L^2(0,T;V)$ (0,25)

$$\text{Dc } \langle J'(u), v-u\rangle = -\int_0^T \left\langle \frac{\partial p(t)}{\partial t}, y(t;v)-y(t;u)\right\rangle_{V',V} dt + \langle p, -\Delta(y(v)-y(u))\rangle_{V_T, V_T'} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)}$$

intégration par parties pour le prod. scalaire de la dualité V',V

$$\stackrel{\downarrow}{=} \int_0^T \left\langle p(t), \frac{\partial y(t;v)}{\partial t} - \frac{\partial y(t;u)}{\partial t}\right\rangle_{V,V'} dt - \langle \underbrace{p(T)}_{=0_H \ (V.(c^*))}, y(T;v)-y(T;u)\rangle_H + \langle p(0), \underbrace{y(0;v)}_{=y_0} - \underbrace{y(0;u)}_{=y_0}\rangle_H + \langle p, -\Delta y(v) - (-\Delta y(u))\rangle_{V_T, V_T'} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} \quad (0,5)$$

$$= \left\langle p, \frac{\partial y(v)}{\partial t} - \frac{\partial y(u)}{\partial t}\right\rangle_{V_T, V_T'} + \langle p, -\Delta y(v) - (-\Delta y(u))\rangle_{V_T, V_T'} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} \quad (0,25)$$

Ici $y(v)$ et $y(u)$ sont solutions uniques de "(a, b, c)" avec au second membre de (a) respectivement $f+v$ et $f+u$. Ce qui ns permet d'écrire :

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \left\langle p, \left(\frac{\partial y(v)}{\partial t} - \Delta y(v)\right) - \left(\frac{\partial y(u)}{\partial t} - \Delta y(u)\right)\right\rangle_{V_T, V_T'} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} \quad (0.25)$$

équation (a) ds le système "(a,b,c)"

$$\stackrel{\downarrow}{=} \langle p, f+v-f-u\rangle_{V_T, V_T'} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} \quad (0.25)$$

$$= \langle p, v-u\rangle_{L^2(Q)} + \langle \beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} = \langle p+\beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} \quad (0.25)$$

<u>Conclusion</u> : $\langle J'(u), v-u\rangle_{L^2(Q)} = \langle p+\beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)}$, $L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega))$

⑦ Voici le système d'optimalité :

(0,5 pt)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f+u & \text{ds } Q = \Omega \times]0,T[\\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0,T[\\ y(0) = y_0 \in H \end{cases}$$ Système de l'état direct

(0.5 pt)
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \alpha(y(u)-z_d) & \text{ds } Q \\ p = 0 & \text{sur } \Sigma \\ p(T) = 0_H \end{cases}$$ Système de l'état adjoint

(0.5 pt)
$$\langle J'(u), v-u\rangle = \langle p+\beta u, v-u\rangle_{L^2(Q)} = \int_0^T \langle p(t)+\beta u(t), v(t)-u(t)\rangle_H dt \geq 0$$

Inéquation d'Euler $\quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$