Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2023/2024.
Novembre 2023.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

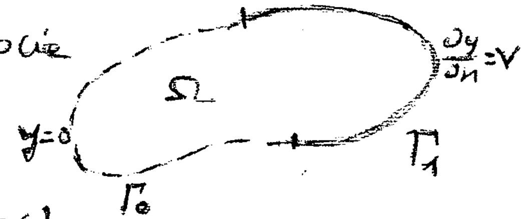
Epreuve de contrôle continu

2h15mn

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ régulière (par ex. Γ é-par morceaux). On considère un découpage de Γ en deux parties Γ_0 et Γ_1 de mesures non nulles ds Γ : $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$. A toute fonction v de $L^2(\Gamma_1)$ on associe la solution y du problème :

$$(Q_v)\begin{cases} -\Delta y = f & \text{ds } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$



1°) Donner la formulation variationnelle (Q'_v) du pb (Q_v) et montrer que ce pb sous sa forme variationnelle admet une solution unique notée $y(v)$ et que cette solution dépend continûment des données du pb (Q_v) à savoir f et v (c.à.d. m.q. $\exists K_1, K_2 > 0 \,/\, \|y(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq K_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + K_2 \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$).

Par la suite, on admettra que $y(v) \in H^2(\Omega)$ et on rappelle que la semi-norme $\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = |\varphi|^2_{H^1(\Omega)}$ est équivalente à la norme $H^1(\Omega)$ pour les fonctions $\varphi \in H^1(\Omega)$ nulles sur une frontière Γ_0 de mesure non nulle ds Γ (c.à.d. par rapport à la mesure de Lebesgue sur Γ) : (5pts)

$$\exists C > 0 \,/\, \forall \varphi \in V = \{\varphi \in H^1(\Omega) \,/\, \varphi_{|\Gamma_0} = 0\} \quad C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq |\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Indication : Pour la formulation variationnelle du pb (Q_v), il faut montrer que

(Q'_v) : $a(y(v), \varphi) = L(\varphi) \;\; \forall \varphi \in V$ où $a(\varphi, \psi) = \int_\Omega \nabla\varphi . \nabla\psi \, dx \;\; \forall \varphi, \psi \in V$

et $L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx + \int_{\Gamma_1} v\varphi \, d\sigma \;\; \forall \varphi \in V$

2°) On introduit la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y(v) - y_d)^2 dx + \frac{r}{2}\int_{\Gamma_1} v^2 d\sigma$

Ici $y(v)$ représente la solution ou la variable d'état du système,

v représente la variable de contrôle avec laquelle on peut agir sur le système (par lequel v est la fonction de contrôle).

y_d représente l'état désiré c.à.d. l'état que l'on cherche à atteindre et ce à l'aide du contrôle v.

$J(v)$ est le critère à minimiser ; il intègre l'écart entre l'état réel (ou direct) du système $y(v)$ et l'état désiré y_d mais aussi le coût du contrôle v avec un coefficient de pondération $r > 0$.

On suppose alors que l'état désiré $y_d \in L^2(\Omega)$.

a) De quel type de contrôle il s'agit ? Justifier (1pt)

b) Montrer qu'en fonction de v, y est une application affine c.à d. que l'on peut écrire $y(v) = Av + B$ où A est une application linéaire de $L^2(\Gamma_1)$ dans V et $B \in H_0^1(\Omega) \subset V$. (1.5pts)

c) Montrer également que y est continue par rapport à v de $L^2(\Gamma_1)$ ds V.
Indication : Comme $y(v) = Av + B$, il suffit de montrer que l'application linéaire A est continue par rapport à v. $(B=0)$ (1pt)

d) J étant G_dérivable, calculer $\langle J'(v), w-v \rangle$ et montrer que
$\langle J'(v), w-v \rangle = \int_\Omega (y(v) - y_d)(y(w) - y(v))\,dx + r\int_{\Gamma_1} v(w-v)\,d\sigma$ où $v, w \in L^2(\Gamma_1)$. (0.5pt)
Indication : On pourra utiliser directement ce résultat :
$$\langle J'(v), w \rangle = \int_\Omega (y(v) - y_d)\,Aw\,dx + r\int_{\Gamma_1} vw\,d\sigma,\ y(v) = Av + B \text{ et } y(w) = Aw + B.$$

e) Montrer que J est strictement convexe à partir de la stricte monotonie de J' : $\langle J'(v) - J'(w), v-w \rangle > 0 \ \forall v, w \in L^2(\Gamma_1)$ avec $v \neq w$. (2.5pts)

f) Montrer, à présent, que J est continue sur $L^2(\Gamma_1)$. (1.5pts)

g) Montrer aussi que J est coercive sur $L^2(\Gamma_1)$ c.à d. montrer qu'il existe $\alpha_J > 0 \,/\, J(v) \geq \alpha_J \|v\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$ $\forall v \in L^2(\Gamma_1)$ où α_J à préciser. (1pt)

h) Montrer que le pb (P) : $\inf_{v \in L^2(\Gamma_1)} J(v)$ admet une solution unique u. (1pt)

i) Posant $J_* = J(u) = \inf_{v \in L^2(\Gamma_1)} J(v)$:

i1) Montrer que $J_* \geq 0$. (0.5pt)

i2) Supposant que l'on a $J_* \leq C^* \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|y_d\|^2_{L^2(\Omega)}$ trouver alors une majoration pour le contrôle optimal u en fction de f et y_d. (0.5pt)

i3) Montrer simplement que J_* est une fonction affine et croissante par rapp. à r. (0.5pt)

3°) On introduit l'état adjoint $p(v)$ solution du système :

$$(R_v)\quad \begin{cases} -\Delta p(v) = y(v) - y_d & \text{ds } \Omega \\ p(v) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

3a) Donner la formulation variationnelle de (R_v) en u notée (R'_u). (1pt)

3b) Montrer que $\langle J'(u), v-u \rangle = \int_{\Gamma_1} (p(u) + ru)(v-u)\,d\sigma \quad \forall v \in L^2(\Gamma_1)$ (1pt)

3c) Ecrire le système d'optimalité caractérisant le contrôle optimal u sachant que le pb d'optimisation donnant le contrôle optimal u est un pb sans contraintes ds $L^2(\Gamma_1)$. (1.5pts)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2023/2024.
Novembre 2023.
Contrôle optimal_EDP (Master2-EDP_S3)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

1°) $\int_\Omega (-\Delta y)\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \iff \int_\Omega \nabla y . \nabla\varphi\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial n}\varphi\, d\sigma = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in V$

$\iff \int_\Omega \nabla y . \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_{\Gamma_1} v\varphi\, d\sigma \quad \forall\varphi\in V = \{\varphi \in H^1(\Omega) / \varphi|_{\Gamma_0} = 0\}$ et sur Γ_1 $\frac{\partial y}{\partial n} = v$ 0,5

Soit alors $a(y,\varphi) = \int_\Omega \nabla y . \nabla\varphi\, dx$ et $L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_{\Gamma_1} v\varphi\, d\sigma$ 0,5

Donc (Q'_v): $a(y,\varphi) = L(\varphi)\ \forall\varphi\in V$ (A ce niveau, on peut remarquer que $H^1_0(\Omega) \subsetneq V$ puisque $\forall\varphi\in H^1_0(\Omega)$ $\varphi|_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_0} = 0 \Rightarrow \varphi|_{\Gamma_0} = 0 = \varphi|_{\Gamma_1}$ $\Rightarrow \varphi\in V$)

Pour m.q. (Q'_v) admet une sol. unique $y(v)$ il suffit de m.q. a cont. sur $V\times V$ coercive sur V et L est continue sur V:

$*$ $\forall\varphi,\psi\in V$ $|a(\varphi,\psi)| = \left|\int_\Omega \nabla\varphi . \nabla\psi\, dx\right| \leq \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^n} . \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^n} = |\varphi|_{1,\Omega} . |\psi|_{1,\Omega}$

1pt $\leq \|\varphi\|_{1,\Omega} . \|\psi\|_{1,\Omega}$

$*$ $\forall\varphi\in V$ $a(\varphi,\varphi) = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = |\varphi|^2_{1,\Omega} \geq \alpha\|\varphi\|^2_{1,\Omega}$ où $\alpha = C^2$

1pt

$*$ $|L(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\varphi\, dx + \int_{\Gamma_1} v\varphi\, d\sigma\right| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega} + \|v\|_{0,\Gamma_1} C_{\gamma_0}\|\varphi\|_{1,\Omega}$

1pt où C_{γ_0} est la constante de continuité de l'application trace γ_0

(Afin de simplifier l'écriture, on adopte ici les notations suiv: $|\cdot|_{1,\Omega} := |\cdot|_{H^1(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega} := \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{0,\Omega} := \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{0,\Gamma_1} := \|\cdot\|_{L^2(\Gamma_1)}$)

Donc $|L(\varphi)| \leq \left(\|f\|_{0,\Omega} + C_{\gamma_0}\|v\|_{0,\Gamma_1}\right)\|\varphi\|_{1,\Omega}$ $\forall\varphi\in V \Rightarrow L$ cont. sur V et $C_L = \|f\|_{0,\Omega} + C_{\gamma_0}\|v\|_{0,\Gamma_1}$

Donc $\exists!\, y(v)\in V / a(y(v),\varphi) = L(\varphi)\ \forall\varphi\in V$. Posons alors $\varphi = y(v)\in V$ ds cette dernière équat. variationnelle : $a(y,y) = L(y) \iff \int_\Omega |\nabla y|^2 dx = \int_\Omega fy\, dx + \int_{\Gamma_1} vy\, d\sigma$

$\Rightarrow |y|^2_{1,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|y\|_{0,\Omega} + \|v\|_{0,\Gamma_1}\|y\|_{0,\Gamma_1} \leq \left(\|f\|_{0,\Omega} + C_{\gamma_0}\|v\|_{0,\Gamma_1}\right)\|y\|_{1,\Omega}$ or $|\cdot|_{1,\Omega} \sim \|\cdot\|_{1,\Omega}$ ds V

c.à.d. $C\|y(v)\|_{1,\Omega} \leq |y(v)|_{1,\Omega} \Rightarrow |y(v)|^2_{1,\Omega} \geq C^2\|y(v)\|^2_{1,\Omega}$ 0,5

$\Rightarrow \|y(v)\|^{\cancel{2}}_{1,\Omega} \leq \left(\|f\|_{0,\Omega} + C_{\gamma_0}\|v\|_{0,\Gamma_1}\right)C'\ \cancel{\|y(v)\|_{1,\Omega}}$ où $C' = 1/C^2$ 0,5

Donc $\|y(v)\|_{1,\Omega} \leq C'\|f\|_{0,\Omega} + C'C_{\gamma_0}\|v\|_{0,\Gamma_1}$ c.à.d. $K_1 = C'$ et $K_2 = C'C_{\gamma_0}$

2°) $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y(v) - y_d)^2 dx + \frac{r}{2}\int_{\Gamma_1} v^2 d\sigma \quad y_d\in L^2(\Omega)$

a) Il s'agit d'un contrôle frontière puisque $\frac{\partial y}{\partial n} = v$ sur Γ_1 1pt

b) On montre que $y : v \mapsto y(v)$ est affine % à v de $L^2(\Gamma_1)$ ds V.

$$(Q_v) \Rightarrow \begin{cases} y = (-\Delta)^{-1} f & \text{ds } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ y = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} v & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Donc ds Ω $y(v) = 0v - \Delta^{-1} f$

et sur Γ $y(v) = \begin{cases} 0v \text{ sur } \Gamma_0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} v \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$ 0,5pt

On peut donc écrire $y(v)$ comme fonction affine de v : $\boxed{y(v) = Av + B}$.

où $Av = 0$ ds Ω $Av = 0$ sur Γ_0 et $Av = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} v$ sur Γ_1 0,5

$B = -\Delta^{-1} f$ ds Ω $B = 0$ sur $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ $\Rightarrow B \in H^1_0(\Omega)$ 0,5

c) $v \mapsto y(v)$ continue % à v $\Leftrightarrow$ $v \mapsto y_{hom}(v) = Av$ $(B = 0)$ continue c.à d. A continue par rapport à v or $y_{hom}(v) = Av$ solution unique de $(Q_{v,hom})$ $\begin{cases} -\Delta y_{hom}(v) = 0 \text{ ds } \Omega \\ y_{hom}(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial y_{hom}(v)}{\partial n} = v \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$ 0,5pt

puisque $B = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Comme $y_{hom}(v)$ est continue par rapport aux données du pb $(Q_{v,hom})$, $f = 0$ et $v \in L^2(\Gamma_1)$

on a $\|y_{hom}(v)\|_{1,\Omega} \leq K_2 \|v\|_{0,\Gamma_1}$ (d'après 1°) $\Rightarrow \|Av\|_{1,\Omega} \leq K_2 \|v\|_{0,\Gamma_1}$ $\forall v \in L^2(\Gamma_1)$. 0,5pt

$\Leftrightarrow A$ opérateur lin continu de $L^2(\Gamma_1) \to V \Rightarrow v \mapsto y(v)$ continue % à $v \in L^2(\Gamma_1)$. 0,25pt

d) $\langle J'(v), w \rangle = \int_\Omega (y(v) - y_d) Aw \, dx + r \int_{\Gamma_1} vw \, d\sigma$ $y(v) = Av + B$ et $y(w) = Aw + B$.

$A(w - v) = Aw - Av = Aw + B - Av - B = Aw + B - (Av + B) = y(w) - y(v)$. 0,5pt

Donc $\langle J'(v), w - v \rangle = \int_\Omega (y(v) - y_d) A(w - v) dx + r \int_{\Gamma_1} v(w - v) d\sigma = \int_\Omega (y(v) - y_d)(y(w) - y(v)) dx + r \int_{\Gamma_1} v(w - v) d\sigma$

e) $\langle J'(v) - J'(w), v - w \rangle = \int_\Omega (y(v) - y_d)(y(v) - y(w)) dx - \int_\Omega (y(w) - y_d)(y(v) - y(w)) dx$
$+ r \int_{\Gamma_1} v(v - w) d\sigma - r \int_{\Gamma_1} w(v - w) d\sigma$. 1pt

$= \int_\Omega (y(v) - \cancel{y_d} - y(w) + \cancel{y_d})(y(v) - y(w)) dx + r \int_{\Gamma_1} (v - w)^2 d\sigma$ 1pt

Donc $\langle J'(v) - J'(w), v - w \rangle = \int_\Omega (y(v) - y(w))^2 dx + r \int_{\Gamma_1} (v - w)^2 d\sigma \geq 0$ $\forall v, w \in L^2(\Gamma_1)$

$\Rightarrow J$ convexe sur $L^2(\Gamma_1)$. De plus si $v \neq w$ alors $\langle J'(v) - J'(w), v - w \rangle > 0$.

On en conclut alors que J est strictement convexe. 0.5pt

f) Comme $J(v) = \frac{1}{2} \|y(v) - y_d\|^2_{0,\Omega} + \frac{r}{2} \|v\|^2_{0,\Gamma_1}$, J est donc une somme (0.25) positive de deux normes (0.25) appliquées à des fonctions de v continues (0.25) par rapport à v : $v \mapsto y(v)$ cont. % à v (V. quest. c)) $\Rightarrow v \mapsto y(v) - y_d$ (0.25) cont. puisque $v \mapsto y_d$ cont. % à v (0.25) (y_d constante % à v) et $v \mapsto v$ continue aussi. Sans oublier l'élévation au carré (0.25) ($x \mapsto x^2$ cont.) qui est aussi une fction continue, on en conclut que J est cont. % à v ($v \in L^2(\Gamma_1)$).

g) Par construction de J : $J(v) \geq \frac{r}{2} \|v\|^2_{0,\Gamma_1}$ (0,25) $\Rightarrow \lim_{\|v\|_{0,\Gamma_1} \to +\infty} J(v) = +\infty$. 1pt

Donc J coercive sur $L^2(\Gamma_1)$ et $\alpha_J = r/2$. (0,25)

h) Comme J convexe (0.75), continue (0.25) ($\Rightarrow$ s.c.i faiblement) et coercive sur $L^2(\Gamma_1)$ (0.25) alors le pb (P) : $\inf_{v\in L^2(\Gamma_1)} J(v)$ admet au moins une solution optimale u.
De plus, J est même strictement convexe (0.25) $\Rightarrow$ la sol. optimale u est unique.

i) **i1)** Par construction de J : $J_* = J(u) = \frac{1}{2}\|y(u)-y_d\|^2_{0,\Omega} + \frac{r}{2}\|u\|^2_{0,\Gamma_1} \geq 0$. (0.5)

i2) $J_* \leq C^*\|f\|^2_{0,\Omega} + \|y_d\|^2_{0,\Omega}$ et $J_* = \frac{1}{2}\|y(u)-y_d\|^2_{0,\Omega} + \frac{r}{2}\|u\|^2_{0,\Gamma_1}$

$\Rightarrow 2J_* = \|y(u)-y_d\|^2_{0,\Omega} + r\|u\|^2_{0,\Gamma_1} \Rightarrow r\|u\|^2_{0,\Gamma_1} \leq 2J_*$

c.à.d. $\|u\|^2_{0,\Gamma_1} \leq \frac{2}{r}J_* \leq \frac{2C^*}{r}\|f\|^2_{0,\Omega} + \frac{2}{r}\|y_d\|^2_{0,\Omega}$.

$\Rightarrow \|u\|_{0,\Gamma_1} = \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \sqrt{\frac{2}{r}}\left(C^*\|f\|^2_{0,\Omega} + \|y_d\|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}$. (0.5)

i3) $J_* = J_*(r) = \frac{1}{2}\|y(u)-y_d\|^2_{0,\Omega} + \frac{r}{2}\|u\|^2_{0,\Gamma_1} = \frac{1}{2}\eta + \frac{r}{2}\mu$, (0.5)
où $\eta = \|y(u)-y_d\|^2_{0,\Omega}$ et $\mu = \|u\|^2_{0,\Gamma_1}$ $\Rightarrow J_* : r \to J_*(r)$ est affine et croissante puisque $\mu \geq 0$.

3°) L'état adjoint $p(v)$ est sol. de

$$(R_v)\quad\begin{cases} -\Delta p(v) = y(v) - y_d & \text{ds } \Omega \\ p(v) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial p}{\partial \vec n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

3a) La formulation variationnelle de (R_v) :

$\int_\Omega (-\Delta p)\Psi\,dx = \int_\Omega (y(v)-y_d)\Psi\,dx \quad \Psi\in V = \{\Psi\in H^1(\Omega)/\Psi|_{\Gamma_0}=0\}$

$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla\Psi\,dx - \underbrace{\int_{\Gamma_0}\frac{\partial p}{\partial \vec n}\Psi\,d\sigma}_{=0} - \underbrace{\int_{\Gamma_1}\frac{\partial p}{\partial \vec n}\Psi\,d\sigma}_{=0} = \int_\Omega (y(v)-y_d)\Psi\,dx \quad \forall\Psi\in V$ (0.5)

$\Rightarrow a(p,\Psi) := \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla\Psi\,dx = \int_\Omega (y(v)-y_d)\Psi\,dx$ car sur Γ_0 $\Psi|_{\Gamma_0}=0$ $\forall\Psi\in V$ et sur Γ_1 $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_1}=0$

Donc (R'_u) : $a(p(u),\Psi) := \int_\Omega \nabla p(u)\cdot\nabla\Psi\,dx = \int_\Omega (y(u)-y_d)\Psi\,dx \quad \forall\Psi\in V$. (0.5)

3b) Rappelant la formulation faible du système d'état direct :

$a(y,\varphi) = \int_\Omega \nabla y\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\Gamma_1} v\varphi\,d\sigma \quad \forall\varphi\in V \quad (Q'_v)$

Soit $\Psi = y(v)-y(u)$ ds (R'_u) $a(p(u), y(v)-y(u)) = \int_\Omega (y(u)-y_d)(y(v)-y(u))\,dx$ (0.25)

et soit $\varphi = p(u)$ ds (Q'_v) $a(y(v),p) = \int_\Omega f p^{(u)}dx + \int_{\Gamma_1} v p_{(u)}\,d\sigma$ et ds (Q'_u) $a(y(u),p^{(u)}) = \int_\Omega f p^{(u)}dx + \int_{\Gamma_1} u p_{(u)}\,dx$

$\Rightarrow a(y(v)-y(u), p_{(u)}) = \int_{\Gamma_1}(v-u)p_{(u)}\,d\sigma = \int_\Omega (y(u)-y_d)(y(v)-y(u))\,dx$ [a sym.]

$= \langle J'(u), v-u\rangle_{0,\Gamma_1} - r\int_{\Gamma_1} u(v-u)\,d\sigma$

$\Rightarrow \langle J'(u), v-u\rangle_{\underbrace{0\Gamma_1}_{L^2(\Gamma_1)}} = \int_{\Gamma_1}(v-u)p^{(u)}\,d\sigma + r\int_{\Gamma_1} u(v-u)\,d\sigma$ (0.5)

$= \int_{\Gamma_1}(p^{(u)} + ru)(v-u)\,d\sigma \quad \forall v\in L^2(\Gamma_1)$ (0.25)

3c) $\forall \xi \in L^2(\Gamma_1)\ \exists v \in L^2(\Gamma_1) / \xi = v-u$ et $\exists v' \in L^2(\Gamma_1) / \xi = u - v' \Rightarrow v'-u = -\xi$

$\langle J'(u), v-u\rangle \geq 0$ $\boxed{\begin{array}{c}u \text{ étant sol. opt. de} \\ J(u) = \inf_{v\in L^2(\Gamma_1)} J(v)\end{array}}$ c.à.d. $\langle J'(u), \xi\rangle \geq 0\ \forall \xi \in L^2(\Gamma_1)$

$\langle J'(u), v'-u\rangle \geq 0$ c.à.d. $\langle J'(u), -\xi\rangle \geq 0\ \forall \xi \in L^2(\Gamma_1)$ $\Big\} \Rightarrow \langle J'(u), \xi\rangle = 0\ \forall \xi \in L^2(\Gamma_1)$

$\Rightarrow J'(u) = 0_{L^2(\Gamma_1)} \Rightarrow p + ru = 0$ puisque $\langle J'(u), v-u\rangle_{0,\Gamma_1} = \langle p+ru, v-u\rangle_{0,\Gamma_1}\ \forall v \in L^2(\Gamma_1)$

$\Rightarrow u = -\dfrac{p}{r}$ c.à.d. $\langle J'(u), \xi\rangle_{0,\Gamma_1} = \langle p+ru, \xi\rangle_{0,\Gamma_1}\ \forall \xi \in L^2(\Gamma_1)$

est donc caractérisé par le système d'optimalité suivant :

$$(S.O.)\begin{cases}\begin{cases} -\Delta y = f & \text{ds } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vec{n}} = -\dfrac{p}{r} & \text{sur } \Gamma_1 \quad \left(\dfrac{\partial y}{\partial \vec{n}} = u = -p/r\right)\end{cases} \quad 0{,}5 \\ \begin{cases} -\Delta p = y - y_d & \text{ds } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_1\end{cases} \quad 0{,}5 \\ (p + ru = 0) \quad 0{,}5\end{cases}$$

<u>Rem.</u> Ds la dernière équation de (S.O.) (l'équation d'Euler), j'accepterai : $\int_{\Gamma_1} (p(u) + ru)(v-u)\, d\sigma = 0\ \forall v \in L^2(\Gamma_1)$.