Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2023-2024.

Master II : EDP et Applications
Module : Théorie de Régularité
Durée : 1h30

Contrôle Continu

Problème-I : **(10 points)**

Soit u la solution du problème suivant : :
'

$$\begin{cases} -\Delta u \;+\; \lambda \dfrac{u}{|x|^2} = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ u \;\geq\; 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Où $g \in L^m(\Omega)$, est une fonction positive et $m = \frac{N}{2}$, $0 < \lambda < \Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)$ la meilleure constante de Hardy-Sobolev, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
En parallèle, on définit, φ une fonction dans $H_0^1(\Omega)$, vérifiant l'équation suivante :

$$-\Delta\varphi + \lambda\frac{\varphi}{|x|^2} = 1 \qquad \text{dans } \Omega, \qquad \varphi = 0 \qquad \text{dans } \partial\Omega$$

1. Prouver que $u \in L^1(\Omega)$.
2. Fixer le cadre fonctionnel de la solution.
3. Donner la formulation variationnelle du problème (1).
4. Démontrer l'existence de la solution du problème (1).
5. Montrer qu'il existe une constante positive α qui vérifié l'estimation suivante

$$\exists\alpha > 0 \qquad \int_\Omega e^{\alpha u}\, dx < \infty.$$

Problème-II : **(10 points)**

On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta_p u \;=\; \lambda u^{q-1} + u^{p^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ u \;\geq\; 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Où $1 < q < p*$, et $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev, $\lambda > 0$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$,

1. Fixer le cadre fonctionnel de la solution.
2. Donner la formulation variationnelle du problème (2) ainsi que la fonctionnelle d'énergie associée.
3. Démontrer l'existence de solution du problème (2).
4. Peut-on démontrer que la solution est bornée ?

Bonne chance.

Correction du Contrôle Continu

Problème-I : **(10 points)**

Soit u la solution du problème suivant : :
'

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda \dfrac{u}{|x|^2} = g(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Où $g \in L^m(\Omega)$, est une fonction positive et $m = \frac{N}{2}$, $0 < \lambda < \Lambda_N = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)$ la meilleure constante de Hardy-Sobolev, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
En parallèle, on définit, φ une fonction dans $H_0^1(\Omega)$, vérifiant l'équation suivante :

$$-\Delta\varphi + \lambda \frac{\varphi}{|x|^2} = 1 \qquad \text{dans } \Omega, \qquad \varphi = 0 \qquad \text{dans } \partial\Omega$$

1. Prouver que u solution de (3), $u \in L^1(\Omega)$.
   En utilisant φ comme fonction, on obtient, par les'inégalités de Hölder, Sobolev

$$\int_\Omega u\,dx = \int_\Omega (-\Delta\varphi + \lambda\frac{\varphi}{|x|^2})u\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx \leq \|\varphi\|_{\frac{2^*}{2}} \|g\|_{\frac{N}{2}} < \infty$$ ....**(02 points)**

2. Fixer le cadre fonctionnel de la solution $H_0^1(\Omega)$. ....**(01 point)**
3. Donner la formulation variationnelle du problème (3).

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u + \lambda\int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2}\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx$$ ....**(01 points)**

4. Démontrer l'existence de la solution du problème (3).
   On définit

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u + \lambda\int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2}\,dx \qquad L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, L(\varphi) = \int_\Omega g\varphi\,dx.$$

   a est une forme bi-linéaire et continue, coervice, et L est une forme linéaire, continue, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3) possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. . ...**(03 points)**

5. Montrer qu'il existe une constante positive α qui vérifié l'estimation suivante

$$\exists\alpha > 0 \qquad \int_\Omega e^{\alpha u}\,dx < \infty..$$ ....**(03 points)**

   Considérons la fonction convexe suivante :

$$\Phi(\sigma) = \Phi_T(\sigma) = \begin{cases} e^{\alpha\sigma} - 1 & \text{si } 0 \leq \sigma \leq T \\ \alpha e^{\alpha T}(\sigma - T) + e^{\alpha T} - 1 & \text{si } \sigma > T \end{cases}$$

   Où α est positive, et comme $\Phi(u)$ est une fonction positive, convexe et Lipschitz, donc :

$$\mathcal{L}(\Phi(u)) \leq \Phi'(u)\mathcal{L}(u) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{L}(u) = -\Delta u + \lambda\frac{u}{|x|^2} \tag{4}$$

En utilisant $\Phi(u)$ comme fonction test dans (4), on obtient :

$$\alpha\int_\Omega |\nabla\Phi(u)|^2\,dx \le \int_\Omega |\nabla\Phi(u)|^2\,dx \le \int_\Omega \mathcal{L}(\Phi(u))\Phi(u)\,dx \le \int_\Omega \Phi'(u)\mathcal{L}(u)\Phi(u)\,dx$$
$$= \int_\Omega \Phi'(u)g(x)\Phi(u)\,dx \le \int_\Omega \Phi'(u)g(x)\Phi(u)\,dx.$$

Nous observons que, si $u<T$, on a $\Phi'(u)=\alpha e^{\alpha\sigma}=\alpha\Phi(u)+\alpha$, donc on obtient par l'inégalité de Sobolev

$$\alpha S^2\|\Phi(u)\|_{2^*}^2 \le \alpha\int_\Omega |\nabla\Phi(u)|^2\,dx \le \alpha\int_{\{x\in\Omega,u<T\}} [\Phi(u)^2g(x)+\alpha g(x)]\,dx + \alpha e^{\alpha T}\int_{\{x\in\Omega,u\ge T\}} \Phi(u)g(x)\,dx. \quad (5)$$

En utilisant l'inégalité de H́older on obtient que :

$$\alpha\int_{\{x\in\Omega,u<T\}} [\Phi(u)^2g(x)+\alpha g(x)]\,dx \le \alpha\|\Phi(u)\|_{2^*}^2\|g\|_{\frac{N}{2}}(1+|\Omega|^{\frac{N-2}{2N}})+c(g).$$

De plus $\Phi(u)$ est décroissante , on aura

$$\alpha e^{\alpha T}\int_{\{x\in\Omega,u\ge T\}} \Phi(u)g(x)\,dx \le \alpha\frac{e^{\alpha T}}{\Phi(T)}\int_{\{x\in\Omega,u\ge T\}} \Phi(u)^2g(x)\,dx \le 2\alpha\|\Phi(u)\|_{2^*}^2\|g\|_{\frac{N}{2}}.$$

A condition que $\alpha T>1$. En mettant ensemble les estimations ci-dessus dans (5), et en fixant α suffisamment petit, nous obtenons une borne pour la norme de $\Phi(u)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$, ce qui implique que

$$\int_\Omega e^{\alpha u}\,dx < \infty.$$

Une fois que on prend T suffisamment grand (dépendant de g).

Problème-II : **(10 points)**

On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{q-1}+u^{p^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ u &\ge 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

Où $1<q<p^*$, et $p^*=\frac{Np}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev, $\lambda>0$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$,

1. Fixer le cadre fonctionnel de la solution $W_0^{1,p}(\Omega)$. ....**(01 point)**.
2. Donner la formulation variationnelle du problème (6) ainsi que la fonctionnelle d'énergie associée.

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u\nabla v - \lambda\int_\Omega u^{q-1}v\,dx = \int_\Omega u^{p^*-1}v\,dx \qquad v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$ ....**(01 point)**

Ainsi que la fonctionnelle d'énergie

$$J: W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}, \qquad J(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega u^q\,dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega u^{p^*}\,dx$$ ....**(01 point)**

3. Démontrer l'existence de solution du problème (6).
On commence par démontrer que les conditions géométrique du théorème de Col ainsi que les conditions de compacité, dans notre cas le problème a un défaut de compacité et cela dù à la présence d'un terme critique u^{p^*} ce qui nous pousse à utiliser la théorie de concentration par compacité (Lemme de Lions), ceci entraine l'existence d'un niveau critique c^*, alors l'existence de la solution critique $u^*\in W_0^{1,p}(\Omega)$. (voir le cours cas $p=2$). ....**(1+2+3=06 points)**
4. Peut-on démontrer que la solution est bornée ? La réponse est non, on n'arrive pas à démontrer la bornitude de la solution du problème (6). ....**(01 point)**