Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Module: Théorie des Semigroupes

Examen final Janvier 2023, Durée 1h30.

Exercice 1:14 pts Soit $T(t)$ un C^0 semigroupe sur un espace de Banach X.
a)(02 pts) Montrer qu'il existe $M \geq 1$, telle que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0,1]$$

b) (04 pts) En déduire que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t > 0, \quad \omega = LogM.$$

c) (02 pts)Montrer que $\forall f \in X$, l'application

$$t \to T(t)f$$

est continue.

d) (02pts) Montrer que $\forall f \in X$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f \ ds = T(t)f$$

e) (04 pts) Soit A l'opérateur infinitesimal du semigroupe $T(t)$.Montrer que

$$\int_0^t T(s)f \ ds \in D(A)$$

et que $D(A)$ est dense dans X.

Solution:
a,b,c) voir le cours.
d) on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f \ ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)f \ ds \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [T(s) - T(t)\ ]\, f ds
\end{aligned}$$

comme $T(s) - T(t)$ est continue, nous aurons

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} [T(s) - T(t)\ ]\, f ds \to 0f = 0$$

e) voir le cours

Exercice2.(06 pts)

a) (02) Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E, vers E.Montrer que si $\|A\| < 1$, alors l'opérateur $I + A$, est inversible.

b) (04 pts) Soit E un espace de Banach , A un opérateur m-dissipatif et B un opérateur linéaire borné sur E.On fixe $f \in E$, montrer que l'équation

$$v + B\left(A - \lambda\right)^{-1} v = f$$

admet une solution unique $v \in E$, lorsque λ est assez grand.

Solution:

a) voir le cours

b) Comme A est m-dissipatif, on a $(A - \lambda I)$ est inversible (voir le cours), de plus

$$\left\|\left(A - \lambda\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

ainsi pourλ assez grans, on a

$$\left\|B\left(A - \lambda\right)^{-1}\right\| \leq \|B\| \left\|\left(A - \lambda\right)^{-1}\right\| \leq \frac{\|B\|}{\lambda} \leq 1$$

et d'aprés a) $I + B\left(A - \lambda\right)^{-1}$ est inversible.