Examen de LATEX

Master-II: Biomathématiques et Modélisation

Département de Mathématiques : 20-12-2023

Reproduisez le texte suivant à l'aide de latex (attention à la mise en forme)

Contents

1 Partie-I : Tableau de Graphiques

Exercice-01 **(8 points)** Insérez un tableau de graphiques représentant des fonctions mathématiques.

(a) $y = x^2$

(b) $y = \sin(x)$

Figure 1: Graphiques de fonctions mathématiques

α	β	γ	ω	μ	λ
A	B	C	D	E	F
90	2		4	2	-9
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -9 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 98 & 77 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 9X & 22 \\ 3 & 6 & -9 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Tournez la page ↷

2 Partie-II: Mathématiques

Exercice-02 **(12 points)**

On considère le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{1+v^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{1+u^2} \end{cases} \tag{1}$$

Où $(x,t) \in [0,1] \times [0, 0.2]$, avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2x\pi),\ v(x,0) = 1 - \frac{1}{2}\cos(2x\pi).$$

En utilisant **pdepe**,

1. Donner les graphes des solutions (u,v), en utilisant la commande **subplot**, avec les nombres des points de x est 15 et les nombres des points de t est 10.
2. Calculer la fonctionnelle d'énergie définie par :

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\big(\frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial v}{\partial x}\big)^2 \Big]\, dx.$$

Théorème 2.1. *(Inégalité de Hardy)*
Soit $1 < p < N$, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:

- $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$
- *L'inégalité de Hardy*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}\, dx \leqslant C_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \qquad avec \qquad C_{N,p} = \Big(\frac{p}{N-p}\Big)^p \tag{2}$$

Démonstration Pour plus de détails, les articles de [1] et [2] ont fixé une caractérisation de la constante de Hardy (2) ■

Théorème 2.2. *(Rellich-Kondrachov)*
Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^1$, on a les injections compactes suivantes :

- *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*[$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*
- *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, +\infty[$.*
- *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

Démonstration Voir [1] et [2] ■

Axiome 2.3. *Une solution du problème* (1) *est dite une solution entropique si la donnée est dans* $L^1(\Omega_T)$*, en plus, d'après le Théorème 2.1, le terme* $\dfrac{u}{|x|^{2s}}$ *est bien défini.*

Axiome 2.4. *Une solution du problème* (1) *est dite une solution faible est une solution si la donnée est dans* $L^m(\Omega_T)$*, où* $m > 1$*.*

References

[1] A. DALL 'AGLIO AND L. ORSINA, On the limit of some nonlinear elliptic equations involving increasing powers, Asympt. Anal., 14 (1997), 49-71.

[2] Tommaso Leonori Ireneo Peral, Ana Primo and Fernando Soria, BASIC ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLOCAL ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS