

# Examen de LATEX

Master-II: Biomathématiques et Modélisation

Département de Mathématiques : 20-12-2023

Reproduisez le texte suivant à l'aide de latex (attention à la mise en forme)

## Contents

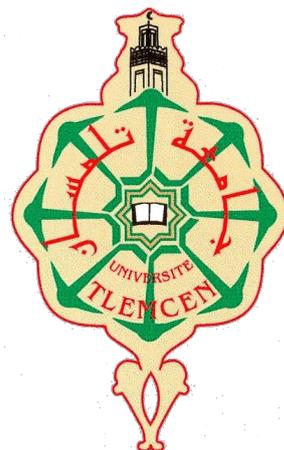
1	Partie-I : Tableau de Graphiques	1
2	Partie-II: Mathématiques	2

## 1 Partie-I : Tableau de Graphiques

**Exercice-01** (8 points) Insérez un tableau de graphiques représentant des fonctions mathématiques.



(a)  $y = x^2$



(b)  $y = \sin(x)$

Figure 1: Graphiques de fonctions mathématiques

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\omega$	$\mu$	$\lambda$
A	B	C	D	E	F
					
90	2		4	2	-9
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX
					

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -9 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 98 & 77 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 9X & 22 \\ 3 & 6 & -9 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Partie-II: Mathématiques

### Exercice-02 (12 points)

On considère le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{1+v^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{1+u^2} \end{cases} \quad (1)$$

Où  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 0.2]$ , avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2x\pi), \quad v(x, 0) = 1 - \frac{1}{2} \cos(2x\pi).$$

En utilisant **pdepe**,

1. Donner les graphes des solutions  $(u, v)$ , en utilisant la commande **subplot**, avec les nombres des points de  $x$  est 15 et les nombres des points de  $t$  est 10.
2. Calculer la fonctionnelle d'énergie définie par :

$$E(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

#### **Théorème 2.1.** (Inégalité de Hardy)

Soit  $1 < p < N$ , si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ :

- $\frac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

- L'inégalité de Hardy

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \leq C_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \quad \text{avec } C_{N,p} = \left( \frac{p}{N-p} \right)^p \quad (2)$$

**Démonstration** Pour plus de détails, les articles de [1] et [2] ont fixé une caractérisation de la constante de Hardy (2) ■

#### **Théorème 2.2.** (Rellich-Kondrachov)

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^1$ , on a les injections compactes suivantes :

- Si  $p < N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, p^*[$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ .

- Si  $p = N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, +\infty[$ .

- Si  $p > N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ .

**Démonstration** Voir [1] et [2] ■

**Axiome 2.3.** *Une solution du problème (1) est dite une solution entropique si la donnée est dans  $L^1(\Omega_T)$ , en plus, d'après le Théorème 2.1, le terme  $\frac{u}{|x|^{2s}}$  est bien défini.*

**Axiome 2.4.** *Une solution du problème (1) est dite une solution faible est une solution si la donnée est dans  $L^m(\Omega_T)$ , où  $m > 1$ .*

## References

- [1] A. DALL 'AGLIO AND L. ORSINA, On the limit of some nonlinear elliptic equations involving increasing powers, Asympt. Anal., 14 (1997), 49-71.
- [2] Tommaso Leonori Ireneo Peral, Ana Primo and Fernando Soria, BASIC ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLOCAL ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS