Université de Tlemcen

Département de Mathématiques, Module: Théorie des semigroupes, Novembre 2023

Master biomathématiques, Contôle continu, Durée 1h30'.

Exercice 1. 06 pts Soit l'espace de Banach $C_0(R)$, des fonctions continues à support compacte. Montrer que

$$S(t)\phi(\sigma) = \phi(t+\sigma), \ \ \forall \phi \in C_0(R), \forall t \geq 0$$

définit un C^0 semigroupe de contraction. Calculer son génerateur infinitésimal.

Solution: **03 pts** S est un semigroupe (coir le cours).Calculons le génerateur **03 pts**

$$A\varphi = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)\phi - \phi}{t}$$

ceci donne que

$$A\varphi(\sigma) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(t+\sigma) - \phi(t)}{t} = \phi'(\sigma)$$

$$D(A) = C^1(R) \cap C_0(R)$$

Exercice 2.09 pts Soit A le generateur infinitésimal d'un C^0semigroupe $T(t)$. Montrer que $S(t) = e^{\lambda t}T(at)$, $a > 0$, est un C^0semigroupe .Calculer le génerateur de $S(t)$.

Solution: S est un semigroupe (voir le cours, **06 pts**).Calculons le génerateur (**03pts)**

$$\lim_{t \to 0} \frac{S(t)\phi - \phi}{t} = \lim_{t \to 0} a e^{\lambda t} \frac{[T(at)\phi - \phi]}{at} + \lim_{t \to 0} \frac{\left[e^{\lambda t} - 1\right]}{t}\phi$$

Ceci donne que

$$B = aA + \lambda I$$

Exercice 3.**05 pts** Soit $f \in C[0,1]$. On définit l'opérateur

$$Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$$

où K est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$ .Montrer que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = Af(t) \\ f(0) = f_0 \in C[0,1] \end{cases}$$

admet une solution unique donnée par un C^0-semigroupe.

Solution:

L'opérateur A est borné **02 pts** , la solution existe et elle est donnée par **03 pts**

$$f(t) = e^{At}f_0$$