Exercice 1 (6 pts) :

On munit l'espace $E = C_b(\,]0,1[\,)$ *des normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *et on pose*

$E_1 = (C_b(\,]0,1[\,),\ \ \|.\|_1)$ *et* $E_\infty = (C_b(\,]0,1[\,),\ \ \|.\|_\infty)$.

Montrer que l'application $I: E_1 \longrightarrow E_\infty$ *définie par* $I(u) = u$

n'est pas continue.

Exercice 2 (7 pts) :

Soit E un espace de Banach et F un espace normé.

Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}(E,\ F)$ *une suite qui converge simplement vers A.*

- *Montrer que* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est bornée.*
- *Montrer que* $\|A\| \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\ A_n$.

Exercice 3 (7 pts) :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et A une application linéaire continue de E dans F i.e. $A \in \mathcal{L}(E,\ F)$. *On définit l'application* ${}^{T}A$ *comme suit :*

$$\begin{aligned} {}^{T}A: F' &\longrightarrow E' \\ L &\longmapsto {}^{T}A(L): E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad x \longmapsto {}^{T}A(L)(x) = L(Ax) \end{aligned}$$

E' $(resp.\ F')$ *est l'espace dual de E* $(resp.\ F)$. *On posera* $L(Ax) = \langle L, Ax\rangle$.

Montrer que ${}^{T}A$ *est une application linéaire continue.*

L'application ${}^{T}A$ *s'appelle la transposée de A.*

Exercice 4(7 pts) :

Soit E un espace préhilbertien et $A: E \longrightarrow E$ *un opérateur symétrique. Montrer que si A est continu alors il existe une suite* (u_n) *de E telle que,*

$$\|u_n\| = 1, \qquad \|Au_n - \lambda_1 u_n\| \longrightarrow 0, \qquad \|A\|_{\mathcal{L}(E)} = |\lambda_1|.$$

Ind. : Considérer une suite maximisante normalisée de $\|A\|_{\mathcal{L}(E)}$.

N. B. : *Les exercices 3 et 4 sont au choix.*

Corrigé

Exercice 1 (6 pts) :

On munit l'espace $E = C_b(\,]0,1[\,)$ *des normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *et on pose*

$E_1 = (C_b(\,]0,1[\,), \ \|.\|_1)$ *et* $E_\infty = (C_b(\,]0,1[\,), \ \|.\|_\infty)$.

Montrons que l'application $I: E_1 \longrightarrow E_\infty$ *définie par* $I(u) = u$

n'est pas continue.

1. L'application I est évidemment linéaire. (**2 pts**)

2. I est continue si et seulement si,

$$\exists C > 0, \forall u \in E_1, \ \|I(u)\|_\infty \leq C \, \|u\|_1. \qquad (p)$$

Nous voulons démontrer que I n'est pas continue, il suffit donc de trouver une fonction ou une suite de fonctions ne vérifiant pas (p).

Considérons la suite de fonctions $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E$ *définie par* $u_n(x) = x^n$.

On a

$$\|u_n\|_1 = \int_0^1 |u_n(x)|\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{0<x<1} |u_n(x)| = \sup_{0<x<1} |x^n| = 1.$$

Nous avons bien, $\|I(u_n)\|_\infty = \|u_n\|_\infty > \|u_n\|_1$.

Et par suite l'application I n'est pas continue. (**4 pts**)

Remarque: Les fonctions u et v telles que $u(x) = e^x$, $v(x) = \cos(\pi x)$ *sont aussi de bons contre-exemples.*

Exercice 2 (7 pts) :

Soit E un espace de Banach et F un espace normé.

Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}(E, \ F)$ *une suite qui converge simplement vers A.*

1. *Montrons que* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est bornée.*

   Pour tout $x \in E$, *la suite* $(A_n x)$ *est convergente dans F vers* Ax.

   a. La suite $(A_n x)$ *étant convergente, donc elle est bornée et d'après le théorème de Banach-Steinhauss* $S \coloneqq \sup_{n\geq 1} \|A_n\| < \infty$. (**2 pts**) *b. Montrons que A est linéaire.*

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}, x, y \in E$ *nous avons*

$$A(x+\alpha y) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n(x+\alpha y) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (A_n x + \alpha A_n y)$$

D'où

$$\begin{aligned} A(x+\alpha y) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n x + \lim_{n\longrightarrow+\infty} \alpha A_n y \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n x + \alpha \lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n y \end{aligned}$$

et finalement

$$A(x+\alpha y) = Ax + \alpha Ay, \quad (\mathbf{1\ pt})$$

A est donc linéaire.

c. Montrons que A est bornée (i.e. continue car linéaire).

Pour tout $x \in E$,

$$\|Ax\| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|A_n x\| \leq \underline{\lim}_{n\longrightarrow+\infty} \|A_n\| \, \|x\| \leq S\|x\|. \qquad (*)$$

Donc A est bornée **(2 pts)**

2. *Montrer que* $\|A\| \leq \underline{\lim}_{n\longrightarrow+\infty} A_n$.

D'après $(*)$, *il existe une constante* $C = \underline{\lim}_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n\| < \infty$ *telle que,*

$$\forall x \in E \quad \|Ax\| \leq C\|x\|$$

Donc $\|A\| \leq C = \underline{\lim}_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n\|$. *D'où le résultat.* **(2 pts)**

Exercice 3 (7 pts) :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et A une application linéaire continue de E dans F i.e. $A \in \mathcal{L}(E, F)$. *On définit l'application* ${}^TA$ *comme suit :*

$$\begin{aligned} {}^TA : F' &\longrightarrow E' \\ L &\longmapsto {}^TA(L) : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad x \longmapsto {}^TA(L)(x) = L(Ax) \end{aligned}$$

E' $(resp.\ F')$ *est l'espace dual de* E $(resp.\ F)$. *On posera* $L(Ax) = \langle L, Ax\rangle$.

1. *Montrons que* ${}^TA$ *est une application linéaire* **(2 pts)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, L, J \in F'$. *Pour tout* $x \in E$, *nous avons*

$$\begin{aligned} {}^TA(L+\alpha J)(x) &= (L+\alpha J)(Ax) = L(Ax) + \alpha J(Ax) \\ &= {}^TA(L)(x) + \alpha\, {}^TA(J)(x) \end{aligned}$$

Donc ${}^TA(L+\alpha J) = {}^TA(L) + \alpha\, {}^TA(J)$, ${}^TA$ *est linéaire.*

2. Montrons que ${}^{T}A$ *est continue*

Pour tous $L \in F',\ x \in E$

$$\left|{}^{T}A(L)(x)\right| = |L(Ax)| \leq \|L\|_{F'}\|Ax\|_F \leq \|L\|_{F'}\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \quad (\mathbf{2\ pts})$$

D'où

$$\left\|{}^{T}A(L)\right\|_{E'} \leq \|L\|_{F'}\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \quad (\mathbf{2\ pts})$$

Par conséquent ${}^{T}A$ *est continue et*

$$\left\|{}^{T}A\right\|_{\mathcal{L}(F',E')} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \quad (\mathbf{1\ pt})$$

Exercice 4(7 pts) :

Soit E un espace préhilbertien et $A: E \longrightarrow E$ *un opérateur symétrique.*

Montrons que si A est continu alors il existe une suite (u_n) *de E telle que,*

$$\|u_n\| = 1, \qquad \|Au_n - \lambda_1 u_n\| \longrightarrow 0, \qquad \|A\|_{\mathcal{L}(E)} = |\lambda_1|.$$

Puisque A est symétrique et continu alors

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup\{|\langle Au, u\rangle|; u \in E, \|u\| = 1\} \quad (\mathbf{1\ pt})$$

Soit alors (u_n) *une suite normalisée maximisante i.e.*

$$\|u_n\| = 1 \ et\ |\langle Au_n, u_n\rangle| \longrightarrow \|A\|_{\mathcal{L}(E)}$$

On peut supposer que $\langle Au_n, u_n\rangle \longrightarrow \lambda_1$ *avec* $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = |\lambda_1|$, $(\mathbf{1\ pt})$

$\big(sinon\ pour\ une\ sous-suite\ de\ (u_n)\big).$

Nous avons, puisque est symétrique,

$$\|Au_n - \lambda_1 u_n\|^2 = \|Au_n\|^2 - 2\lambda_1\langle Au_n, u_n\rangle + \lambda_1^2\,\|u_n\|^2. \quad (\mathbf{1\ pt})$$

D'où

$$\begin{aligned}\|Au_n - \lambda_1 u_n\|^2 &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(E)}^2\|u_n\|^2 - 2\lambda_1\langle Au_n, u_n\rangle + \lambda_1^2\,\|u_n\|^2 \quad (\mathbf{2\ pts})\\ &= \lambda_1^2\|u_n\|^2 - 2\lambda_1\langle Au_n, u_n\rangle + \lambda_1^2\,\|u_n\|^2\\ &= 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1\langle Au_n, u_n\rangle \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty. \qquad (\mathbf{2\ pts})\end{aligned}$$

Donc $\|Au_n - \lambda_1 u_n\| \longrightarrow 0.$