

ÉPREUVE FINALE -S1

Statistiques Mathématiques

Master 1-Statistiques et Probabilités Approfondies

2023/2024

Exercice 1 :

Soient un n -échantillon $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ où les composantes $(X_i, i \in \{1, \dots, n\})$ sont iid de loi continue F . À partir de X , on construit la Statistique d'Ordre (SO) $X^{(\bullet)} = (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ où les composantes $(X_{(i)}, i \in \{1, \dots, n\})$ sont rangées dans l'ordre croissant. On considère la fonction de répartition empirique, estimateur de la f.d.r F défini, $\forall x \in \mathbb{R}$, par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}.$$

- 1- Montrer que $F_n(X)$ est un estimateur sans biais de $F(X)$.
- 2- Pour $p \in]0, 1[$, montrer que

$$F_n^{-1}(p) = X_{([\!n p])},$$

où $[y] = \min_{m \in \mathbb{N}} \{m \geq y, y \in \mathbb{R}\}$, partie entière du réel y .

Exercice 2 :

Soit le n -échantillon $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ où les v.a $(X_i, i \in \{1, \dots, n\})$ sont iid de loi mère paramétrée, ayant pour densité de probabilité

$$f(x, \theta) = (1 + \theta)x^\theta, \quad \forall x \in]0, 1[.$$

- 1- Par la méthode des moments, construire un estimateur $\hat{\theta}_{n,1}(X)$ pour le paramètre θ .
- 2- Par la méthode du maximum de vraisemblance, construire un deuxième

estimateur $\hat{\theta}_{n,2}(X)$ pour le paramètre θ .

Exercice 3 :

Des semeurs de pluie ont pu établir que le niveau naturel des pluies en millimètres par an, suit une loi normale de gauss de moyenne 600 et de variance 100. Ils prétendaient pouvoir augmenter de 50 mm le niveau moyen de pluie et ceci par insémination des nuages au moyen d'iodure d'argent. Leur procédé fut mis à l'essai entre 2015 et 2023 dont on a relevé les hauteurs de pluies suivantes :

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
niveau de pluie(mm)	614	510	512	501	780	603	535	650	788

Les agriculteurs hésitaient à opter pour le procédé des faiseurs de pluie, ils avaient besoin d'être convaincus. À un risque égale à 5%, vérifier l'efficacité de l'insémination, en d'autres termes, les agriculteurs ont -ils raison d'adopter la procédure d'insémination?

Exercice 4 :

Afin de vérifier la qualité d'un générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice scientifique, on a effectué 250 simulations à valeurs dans $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, 9\}$, dont les observations sont présentées dans le tableau ci-dessous. À un seuil de 5% et à l'aide du test du Khi-deux, vérifier si le générateur donne des réalisations uniformément distribuées sur l'ensemble \mathcal{D} .

Chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	23	28	32	23	26	31	18	31	19	19