Université Abou Bekr Belkaid 2023/2024
Département de Mathématiques
M1Statistiques et probabilités approfondies.
Module: Analyse numérique

Examen final
Corrigé

Exercice 1 (6 points)
1. A partir d'un polynôme d'interpolation approprié obtenir la formule d'Adams suivante:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)$$

Déterminer l'erreur de la méthode puis déduire l'ordre de consistance.
Solution
1. **(4 points)**
On considère le polynôme d'interpolation passant par les trois points $(t_n, f_n), (t_{n+1}, f_{n+1})$ et (t_{n-1}, f_{n-1})

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{(t-t_{n+1})(t-t_{n-1})}{(t_n-t_{n+1})(t_n-t_{n-1})} f_n + \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{(t_{n+1}-t_n)(t_{n+1}-t_{n-1})} f_{n+1} \\ &\quad + \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(t_{n-1}-t_n)(t_{n-1}-t_{n+1})} f_{n-1} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} p(t) &= -\frac{(t-t_{n+1})(t-t_{n-1})}{h^2} f_n + \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{2h^2} f_{n+1} \\ &\quad + \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{2h^2} f_{n-1}. \end{aligned}$$

En intégrant entre t_{n-1} et t_{n+1} :

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t-t_{n+1})(t-t_{n-1})\,dt = h^3 \int_0^2 s(s-2)\,ds = -\frac{4}{3}h^3$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n-1})\,dt = h^3 \int_0^2 s(s-1)\,ds = \frac{2}{3}h^3$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n+1})\,dt = h^3 \int_0^2 (s-1)(s-2)\,ds = \frac{2}{3}h^3$$

ce qui donne

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p(t)dt = \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)$$

Maintenant pour l'erreur

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (f(t) - p(t))\, dt = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{f'''(\xi(t))}{3!} (t - t_{n-1}) (t - t_{n+1}) (t - t_n)\, dt$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (f(t) - p(t))\, dt \right| \\ \leq\ & \frac{M_3}{3!} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |(t - t_{n-1}) (t - t_{n+1}) (t - t_n)|\, dt \\ \leq\ & \frac{M_3}{3!} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (t - t_{n-1}) (t - t_{n+1}) (t_n - t)\, dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1}) (t - t_{n+1}) (t - t_n)\, dt \right) \\ \leq\ & \frac{M_3}{3!} h^4 \left(\int_0^1 s (s-1) (s-2)\, ds - \int_1^2 s (s-1) (s-2)\, ds \right) \\ \leq\ & \frac{M_3}{12} h^4 \end{aligned}$$

Il en résulte que la méthode est **au moins** d'ordre 3.

Exercice 2 (4 points)

Montrer que la méthode multipas linéaire suivante

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 2h (2f_{n+1} + f_n).$$

est d'ordre 3 mais que cette méthode n'est pas convergente.

Solution

1.(**2 points)**

On a $\alpha_0 = -5, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1, \beta_0 = 2$et $\beta_1 = 4$.

Vérifions l'ordre de consistance.

On a pour tout a

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i = -5 + 4 + 1 = 0$$

et

$$\sum_{i=0}^{2} i\alpha_i = 4 + 2 = 6 = \sum_{i=0}^{2} \beta_i.$$

De plus

$$\sum_{i=0}^{2} i^2\alpha_i = 4 + 4 = 8 = 2\sum_{i=0}^{2} i\beta_i.$$

et

$$\sum_{i=0}^{3} i^3\alpha_i = 4 + 8 = 12 = 3\sum_{i=0}^{3} i^2\beta_i.$$

De plus

$$\sum_{i=0}^{3} i^4\alpha_i = 4 + 16 = 20 \neq 16 = 4\sum_{i=0}^{3} i^3\beta_i$$

Le schéma est donc consistant d'ordre 3

2. **(2 points)**

Vérifions la condition des racines.

$$\rho(z) = z^2 + 4z - 5 = (z-1)(z+5)$$

$z_1 = 1$ et $z_2 = 5$ sont les racines de $\rho(z)$.

$\rho(z)$ admet une racine de module $|z_2| = 5 > 1$, le schéma n'est pas stable, ce schéma n'est pas convergent.

Exercice 3 (sur 10 points: 2 point / question)

On considère la méthode de Runge-Kutta donnée par le tableau de Butcher suivant

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & -1/6 & 4/3 & -1/6 \end{array} \tag{1}$$

1. Décrire les méthodes de quadrature utilisées à chaque étape.
2. Ecrire explicitement et en détail le schéma associé au tableau de Butcher (1).
3. Montrer que la méthode est au moins d'ordre 2.
4. Déterminer la condition sur z pour décrire l'ensemble de stabilité absolue de la méthode.
5. L'ensemble précédent contient-il un point z avec $\mathrm{Re}(z) < 0$? Cet ensemble contient-il tous les points z tels que $\mathrm{Re}(z) < 0$?

Corrigé

1. Les points intermédiaires sont

$$t_{n,1} = t_n, t_{n,2} = t_n + \frac{h}{2} \text{ et}, t_{n,3} = t_n + h$$

La formule de quadrature de f sur $[0,1]$ associée aux poids b_i est:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx -\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}f(1)$$

Première étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \approx \frac{1}{2}f(0)$$

Deuxième étape, la formule de quadrature de f sur $[0,1]$ est:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx -f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

2.

$$
\begin{aligned}
y_{n,1} &= y_n \\
y_{n,2} &= y_n + \frac{h}{2} f\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) \\
y_{n,3} &= y_n - hf\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) + 2hf\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) \\
y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{6} hf\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) + \frac{4}{3} hf\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) - \frac{1}{6} hf\left(t_{n,3}, y_{n,3}\right)
\end{aligned}
$$

La méthode proposée s'écrit:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) \\
k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} h\left(-k_1 + 8k_2 - k_3\right)
\end{aligned}
$$

3. **ordre** ≥ 1

$$
\sum_{i=1}^{4} b_i = -\frac{1}{6} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = 1
$$

ordre ≥ 2 de plus on doit avoir

$$
\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}
$$

4. En prenant $f(t, y) = \lambda y, \ \ \lambda \in \mathbb{C}$, les équations définissant k_1, k_2 et k_3 s'écrivent

$$
\left\{
\begin{array}{c}
k_1 = \lambda y_n \\
k_2 = \lambda\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y_n \\
k_3 = \lambda\left(1 + \lambda h + \lambda^2 h^2\right) y_n
\end{array}
\right.
$$

De là, on déduit

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} h\left(\lambda + 4\lambda\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) + \lambda\left(1 + \lambda h + \lambda^2 h^2\right)\right) y_n \\
&= \left(1 + h\lambda + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6}\right) y_n
\end{aligned}
$$

En posant $z = \lambda h = x + iy$ alors

$$
y_n = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right)^n y_0
$$

$$
\text{La suite } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| < 1
$$

La condition pour avoir la stabilité est donc

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| < 1$$

5. Soit $z = -1$ alors $\mathrm{Re}(z) < 0$ et

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

L'ensemble précédent contient au moins un point z avec $\mathrm{Re}(z) < 0$.
Mais il ne contient pas tous les points z tels que $\mathrm{Re}(z) < 0$, puisque
Pour $z = -3$

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| = \left|1 - 3 + \frac{9}{2} - \frac{27}{6}\right| = 2 > 1$$