Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire : 2023-2024**
Faculté des Sciences **Module : Contrôle optimal**
Département de Mathématiques **Date : 13-06-2024**

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN DE RATTRAPAGE.

Exercice 1 (contrôle optimal d'une épidémie par vaccination : 10 points).

On considère une population de N individus soumis à une épidémie qu'on veut contrôler par vaccination. Par simplicité, on suppose qu'un individu qui a été malade et soigné peut à nouveau tomber malade.

Le modèle est le suivant. On note $\alpha > 0$ le taux de contamination, $u(t)$ (contrôle) le taux de vaccination, et $x(t)$ le nombre d'individus infectés. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \alpha x(t)(N - x(t)) - u(t)x(t), \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $0 < x_0 \leq N$, et où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq C,$$

où $C > 0$ est une constante.

Soit $T > 0$ fixé. On cherche à minimiser le critère :

$$C(u) = \int_0^T (x(t) + \beta u(t))\, dt,$$

où $\beta > 0$ est fixé.

On note par λ le vecteur adjoint, u^* le contrôle optimal et x^* la trajectoire optimale.

1) Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, on a $x^*(t) > 0$.

2) Écrire le Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal (1).

3) Écrire l'équation de l'extrémale sur le vecteur adjoint.

4) Donner la condition de transversalité $\lambda(T)$.

5) En utilisant la condition de minimisation de Pontriaguine montrer que le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } \beta - \lambda(t)x^*(t) > 0, \\ C \text{ si } \beta - \lambda(t)x^*(t) < 0. \end{array} \right.$$

6) En déduire que $u^*(t) = 0$ sur $[T - \varepsilon, T]$, avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit.

7)

7.1) Pour tout $t \in [0,T]$, on pose par définition $\varphi(t) = \beta - \lambda(t)x^*(t)$ et on suppose que $\alpha\beta - 1 \neq 0$. Soit t_0 un temps tel que $\varphi(t_0) = 0$. Démontrer qu'alors on a nécessairement $\varphi'(t_0) \neq 0$ et en déduire que l'ensemble $\{t \in [0,T] / \ \varphi(t) = 0\}$ est de mesure nulle.

7.2) Que peut-on en déduire sur le contrôle optimal u^* ?

Exercice 2 : 10 points.

On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t),\ t \in [0,T], \\ \dot{y}(t) = u(t) - z(t),\ t \in [0,T], \\ \dot{z}(t) = 1,\ t \in [0,T], \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ x(T) = 2,\ y(T) = 0, \\ \min \left(\dfrac{1}{2} \int_0^T u^2(t)\, dt \right), \end{cases}$$

où u est le contrôle et on suppose que T est libre et que toute extrémale est normale.

On note par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ le vecteur adjoint, u^* le contrôle optimal et (x^*, y^*, z^*) la tajectoire optimale.

1) Écrire le Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal (2).

2) Écrire les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

3) En déduire que

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= c_1, t \in [0,T], \\ \lambda_2(t) &= -c_1 t + c_2, t \in [0,T], \\ \lambda_3(t) &= -\frac{c_1}{2} t^2 + c_2 t + c_3, t \in [0,T], \end{aligned}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes réelles.

4) Montrer que $u^*(t) = c_1 t - c_2$, pour tout $t \in [0,T]$.

5) Montrer que

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{1}{6}(c_1 - 1) t^3 - \frac{c_2}{2} t^2, t \in [0,T], \\ y^*(t) &= \frac{1}{2}(c_1 - 1) t^2 - c_2 t, t \in [0,T], \\ z^*(t) &= t, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

6) En utilisant les conditions $x^*(T) = 2$ et $y^*(T) = 0$, montrer que

$$c_1 = -\frac{24}{T^3} + 1 \text{ et } c_2 = -\frac{12}{T^2}.$$

7) Donner la condition de transversalité $\lambda_3(T)$.

8) Donner la condition de tranversalité sur le Hamiltonien en temps final T et en déduire la valeur de T.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. : 2023-2024
Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé de l'examen de rattrapage
du Jeudi 13 Juin 2024.

Exercice 1 : 10 points.

1) Montrons que $\forall\, t \in [0,T]$, on a $x^*(t) > 0$.

Supposons par absurde qu'il existe un point $t_* \in]0,T]$ tels que $x^*(t_*) = 0$ et $x^*(t) > 0$, pour tout $t \in [0, t_*[$.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(Ch) \quad \begin{cases} \dot{x}^*(t) = \alpha\, x^*(t)\,(N - x^*(t)) - u(t)\, x^*(t), \\ x^*(t_*) = 0. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy (Ch) admet deux solutions la fonction x^* et la fonction identiquement nulle. 1 pt.

Contradiction car le problème de Cauchy (Ch) admet une unique solution d'après le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

2) Le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (1) est donné par

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \lambda(t)\left[\alpha x(t)(N - x(t)) - u(t)x(t)\right] + x(t) + \beta u(t).$$

1pt.

3) L'équation de l'extrémale sur le vecteur adjoint.

Pour $t \in [0, T]$, on a

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$$

0,25 pts

$$= \lambda(t)\left[2\alpha x^*(t) + u^*(t) - \alpha N\right] - 1.$$

0,75 pts

4) La condition de transversalité $\lambda(T)$.

On a,

$$\lambda(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(T)), \quad \text{avec } \Psi(x(T)) \equiv 0.$$

$$= 0.$$

1pt.

5) On a,

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in [0,C]} H(x^*(t), \lambda(t), v).$$

Ce qui donne,

$$[\beta - \lambda(t)x^*(t)]\, u^*(t) = \min_{v \in [0,C]} (\beta - \lambda(t)x^*(t))\, v.$$

2pts

Ce qui entraîne que,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \beta - \lambda(t)x^*(t) > 0, \\ C \text{ si } \beta - \lambda(t)x^*(t) < 0. \end{cases}$$

6) Comme $\beta - \lambda(T)x^*(T) = \beta > 0$, et la fonction $t \longmapsto \beta - \lambda(t)x^*(t)$ est continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ suffisament petit tel que

$\beta - \lambda(t)x^*(t) > 0$, pour tout $t \in [T-\varepsilon, T]$ et

par conséquent d'après la question précédente

$u^*(t) = 0$ sur $[T-\varepsilon, T]$.

1pt.

7)

7.1) On a,

$$\varphi(t) = \beta - \lambda(t) x^*(t).$$

Alors,

$$\dot{\varphi}(t) = -\dot{\lambda}(t) x^*(t) - \lambda(t) \dot{x}^*(t)$$

$$= -\lambda(t) x^*(t) [2\alpha x^*(t) + u^*(t) - \alpha N] + x^*(t)$$

$$- \lambda(t) x^*(t) [\alpha (N - x^*(t)) - u(t)]$$

1pt

$$= -\alpha \lambda(t) x^{*2}(t) + x^*(t).$$

Comme $\varphi(t_0) = 0$, alors

$$\dot{\varphi}(t_0) = -\alpha \lambda(t_0) x^{*2}(t_0) + x^*(t_0)$$

$$= -\alpha \beta x^*(t_0) + x^*(t_0)$$

0,5 pts

$$= (1 - \alpha\beta) x^*(t_0)$$

$\neq 0$ car $1 - \alpha\beta \neq 0$ par hypothèse et $x^*(t_0) > 0$.

D'après ce qui précède, il résulte que les zéros de la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ sont isolés et par conséquent l'ensemble $\{t \in [0, T] / \varphi(t) = 0\}$ est de mesure nulle. 0,5 pts

7.2) D'après les questions 5) et 7.1), il résulte que le contrôle optimal u^* est bang-bang. 1pt.

Exercice 2 : 10 points

1) Le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (2).

On a,

$$H(x(t), y(t), z(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), u(t))$$
$$= \lambda_1(t)\, y(t) + \lambda_2(t)\,(u(t) - z(t)) + \lambda_3(t) + \frac{u^2(t)}{2}.$$

1pt.

2) Les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

Pour $t \in [0, T]$, on a

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), y^*(t), z^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), u^*(t))$$
$$= 0,$$

0,5 pts

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x^*(t), y^*(t), z^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), u^*(t))$$
$$= -\lambda_1(t),$$

0,5 pts

et

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial z}(x^*(t), y^*(t), z^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), u^*(t))$$

$$= \lambda_2(t).$$

0,5 pts

3) Comme $\dot{\lambda}_1(t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$. 0,5 pts

Alors, $\lambda_1(t) = c_1$, pour tout $t \in [0, T]$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$.

De même, on a

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

0,5 pts

Alors,

$$\lambda_2(t) = -c_1 t + c_2, \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ avec } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalement comme $\dot{\lambda}_3(t) = \lambda_2(t)$, pour tout $t \in [0, T]$, alors

$$\lambda_3(t) = -\frac{c_1}{2} t^2 + c_2 t + c_3, \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ avec } c_3 \in \mathbb{R}.$$

0,5 pts

4) On a,

0,5 pts $\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), y^*(t), z^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), u^*(t)) = 0.$

C'est-à-dire,

$$\lambda_2(t) + u^*(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = -\lambda_2(t)$$
$$= c_1 t - c_2, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

0,5 pts

5) On a,

$$\dot{z}^*(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Alors, $z^*(t) = t$ car $z^*(0) = 0$

0,5 pts

De même,

$$\dot{y}^*(t) = u^*(t) - z^*(t), \text{ pour tout } t \in [0,T]$$
$$= (c_1 - 1)t - c_2, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

et comme $y^*(0) = 0$, on obtient

$$y^*(t) = \frac{(c_1 - 1)}{2} t^2 - c_2 t, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

0,5 pts

Maintenant comme,

$$\dot{x}^*(t) = y^*(t), \text{ pour tout } t \in [0,T]$$
$$= \frac{(c_1-1)}{2} t^2 - c_2 t, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

0,5 pts

et comme $x^*(0)=0$, on obtient

$$x^*(t) = \frac{(c_1-1)t^3}{6} - \frac{c_2 t^2}{2}, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

6) Les conditions $x^*(T)=2$ et $y^*(T)=0$ donnent

$$\begin{cases} \dfrac{(c_1-1)T^3}{6} - \dfrac{c_2 T^2}{2} = 2 \\ \dfrac{(c_1-1)}{2} T^2 - c_2 T = 0. \end{cases}$$

Alors

$$c_1 - 1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{T^2}{2} \\ 0 & -T \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{T^3}{6} & -\frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & -T \end{vmatrix}} = \frac{-2T}{\frac{T^4}{12}}$$
$$= -\frac{24}{T^3}.$$

C'est-à-dire,

$$c_1 = 1 - \frac{24}{T^3};$$

0,5 pts

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{T^3}{6} & 2 \\ \frac{T^2}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{T^3}{6} & -\frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & -T \end{vmatrix}} = \frac{-T^2}{\frac{T^4}{12}} = -\frac{12}{T^2}.$$

C'est-à-dire,

$$C_2 = -\frac{12}{T^2}.$$

0,5 pts

7) La condition de transversalité $\lambda_3(T)$.

On a,

$$\lambda_3(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(T, z^*(T)), \quad \text{avec } \Psi(T, z(T)) = 0.$$

$$= 0.$$

1 pt.

8) On a,

0,5 pts

$$H(x^*(T), y^*(T), z^*(T), \lambda_1(T); \lambda_2(T), \lambda_3(T), u^*(T)) = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}(T, z^*(T)).$$

C'st-à-dire,

$$\lambda_1(T)\, y^*(T) + \lambda_2(T)\left(u^*(T) - z^*(T)\right) + \lambda_3(T) = 0$$

C'st-à-dire,

$$\lambda_2(T)\left(-\frac{24}{T^2} + T + \frac{12}{T^2} - T\right) = 0.$$

C'st-à-dire,

$$\frac{-12\lambda_2(T)}{T^2} = 0.$$

C'st-à-dire,

$$\lambda_2(T) = 0.$$

C'st-à-dire

$$\left(+\frac{24}{T^3} - 1\right)T - \frac{12}{T^2} = 0$$

C'st-à-dire, $12 = T^3.$

1 pt.

Alors, $T = \sqrt[3]{12}.$