Université de Tlemcen
Département de Mathématiques

Faculté des sciences
Module: Théorie de bifurcation
Examen final, Mai 2024, durée 1h30.

Exercice1: 06pts Soit le système discret

$$x_{n+1} = x_n \left(\mu - x_n^2\right) = f_\mu \left(x_n\right), \qquad \mu > 0$$

a) Déterminer les points fixes et étudier leur stabilité.
b) Le système présente t il une bifurcation au point d'équilibre 0 ?
Sol: les points d'équilibre **02 pts** sont

$$x^* = 0 \text{ ou } x^* = \pm\sqrt{a-1} \ \forall a > 1$$

Pour la stabilité **02 pts**, nous calculons la dérivée

$$\frac{d}{dx} f_\mu \left(x\right) = a - 3x^2$$

ainsi

$$x^* = 0 \ \text{ est stable pour } 0 < a < 1 \text{, et instable pour } a > 1$$

De meme

$$x^* = \sqrt{a-1} \text{ est stable pour } 1 < a < 2 \text{, et instable pour } a > 2$$

Le diagramme de bifurcation donne une bifurcation (**02 pts**) pour $a = 1$. (changement du nombre de points d'équilibre avec un changement de stabilité).

Exercice 2:06 pts

Soit le système

$$(1) \qquad x_{n+1} = 1 - x_n^2 = f(x_n)$$

a) trouver un 2 cycle du système (1) et determiner sa stabilité.
Sol:
Un calcul simple montre que **(03 pts)**

$$f(0) = 1 \text{ et } f(1) = 0$$

Pour étudier la stabilité, on calcule

$$\frac{d}{dx} f(x) = -2x$$

et on a **(03 pts)**

$$f'(0)f'(1) = 0$$

Donc le deux cycle est stable.

Exercice3: 08 pts Soit le système discret

$$x_{n+1} = \mu x_n \left(1 - x_n^2\right) = f_\mu\left(x_n\right)$$

a) Déterminer les points fixes et étudier leur stabilité.
b)pour quelle valeur de $\mu \geq 0$, l'intervalle $[-1, +1]$ est positivement invariant.
Sol: les points fixes sont: **(02 pts)**

$$x_1^* = 0,\ x_\pm^* = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}$$

notons que $x_\pm^*$ existent pour $\mu \geq 1$.
Pour étudier la stabilité, calculons la dérivée

$$\frac{d}{dx} f_\mu\left(x\right) = \mu\left(1 - 3\left(x\right)^2\right)$$

ainsi

$$\frac{d}{dx} f_\mu\left(x_\pm^*\right) = \mu\left(1 - 3\left(x_\pm^*\right)^2\right) = 3 - 2\mu$$

Les 2 points fixes sont stables si **(03pts)**

$$-1 < 3 - 2\mu < 1$$

par contre

$$\frac{d}{dx} f_\mu\left(0\right) = \mu$$

et $x_1^* = 0$ est stable si

$$|\mu| < 1$$

b) pour quelle valeur de $\mu \geq 0$, l'intervalle $[-1, +1]$ est positivement invariant.

(03 pts) Le tableau de variation de $f_\mu\left(x\right)$ montre que

$$\frac{-2\mu}{3\sqrt{3}} \leq f_\mu\left(x\right) \leq \frac{2\mu}{3\sqrt{3}}$$

il est clair que $[-1, 1]$ est positivement invariant si

$$-1 \leq \frac{-2\mu}{3\sqrt{3}} \leq \frac{2\mu}{3\sqrt{3}} \leq 1$$