Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Faculté des Sciences**
Département de Mathématiques **Master I : Biomathématiques et Modélisation**
Année 2023-2024 **Étude Math Science Vivant**

Examen final 2

Question de cours (4pts)

1- Donner la définition des dérivées faibles première et deuxième d'une fonction u dans $L^2(0,2)$. **(2pts)**

2- Montrer que $||u||_{W^{1,2}(0,2)}$ est équivalente à $||u'||_{L^2(0,2)}$ si $u \in W_0^{1,2}(0,2)$. **(2pts)**

Exercice 1 (8pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \dfrac{2u(x)}{1+u(x)}, \quad x \in (0,2), \\ \\ u(0) = u(2) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Supposons que (1) admet une solution positive dans un espace de Banach $\mathbb{X}$

1- Donner la définition de la solution de (1) dans l'espace $\mathbb{X} := W_0^{1,2}(0,2)$, (justifier). **(3pts)**

2- Donner la définition de la solution de (1) dans l'espace $\mathbb{X} := L^2(0,2)$. **(2pts)**

3- Donner le(s) solution(s) constante(s) de (1), (justifier). **(1pt)**

4- Linéariser le problème (1) au voisinage d'une solution constante quelconque u_*, **(2pts)**.

Exercice 2 (8pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) = f(x), \ \ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où f est une fonction suffisamment régulière.

Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) - \frac{u_{i+1}-u_i}{h} = f_i, \ \ i = 1, ..., N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

où $f_i = f(x_i)$. Posons $F_h = (f_1, f_2, ..., f_N)^t$ et $U_h = (u_1, u_2, ..., u_N)^t$.

1- Donner la définition de l'erreur de consistance pour le problème (2). **(1pt)**

2- Montrer que si $F_h \geq 0$ alors $U_h \geq 0$. **(5pts)**

3- En déduire l'existence et l'unicité de la suite U_h. **(2pts)**

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Faculté des Sciences**
Département de Mathématiques **Master I : Biomathématiques et Modélisation**
Année 2023-2024 **Étude Math Science Vivant**

Correction de l'examen final 2

Question de cours (4pts)

1- Donner la définition des dérivées faibles première et deuxième d'une fonction u dans $L^2(0,2)$. **(2pts)**

2- Montrer que $||u||_{W^{1,2}(0,2)}$ est équivalente à $||u'||_{L^2(0,2)}$ si $u \in W_0^{1,2}(0,2)$. **(2pts)**

Correction

1- a) Il existe $g_1 \in L^2(0,2)$ tel que $\int_0^2 u(x)\phi'(x)dx = -\int_0^2 g_1(x)\phi(x)$ pour tout $\phi \in C_K^\infty(0,2)$. On pose $u' := g_1$.

b) Il existe $g_2 \in L^2(0,2)$ tel que $\int_0^2 u'(x)\phi'(x)dx = -\int_0^2 g_2(x)\phi(x)$ pour tout $\phi \in C_K^\infty(0,2)$. On pose $u'' := g_2$.

2- On sait que

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{1,2}(0,2)} &= \Big(\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^2 |u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \\ &\geq \Big(\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

A présent nous utilisons l'inégalité de Poincaré, à savoir il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^2 |u(x)|^2 dx \leq c \int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx.$$

On conclut alors

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{1,2}(0,2)} &\leq \Big(\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx\Big)^{1/2} + c\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx \\ &\leq (1+c)\Big(\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \text{ } \textbf{(2pts)} \end{aligned}$$

Exercice 1 (8pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \dfrac{2u(x)}{1+u(x)}, & x \in (0,2), \\ u(0) = u(2) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Supposons que (1) admet une solution positive dans un espace de Banach $\mathbb{X}$

1- Donner la définition de la solution de (1) dans l'espace $\mathbb{X} := W_0^{1,2}(0,2)$, (justifier). **(3pts)**

2- Donner la définition de la solution de (1) dans l'espace $\mathbb{X} := L^2(0,2)$. **(2pts)**

3- Donner le(s) solution(s) constante(s) de (1), (justifier). **(1pt)**

4- Linéariser le problème (1) au voisinage d'une solution constante quelconque u_* de (1) **(2pts)**.

Correction de l'exercice 1 (8pts)

1- Posons $F(u(x)) = \dfrac{2u(x)}{1+u(x)}$. La solution de (1) dans $W^{1,2}(0,2)$ est définie,

$$\int_0^2 \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx + \int_0^2 u(x)v(x)dx = \int_0^2 F(u(x))v(x)dx, \ \ (\mathbf{1pt})$$

pour tout $v \in W_0^{1,2}(0,2)$. En effet

$$\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)||\frac{dv}{dx}(x)|dx \leq (\int_0^2 |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx)^{1/2}(\int_0^2 |\frac{dv}{dx}(x)|^2 dx)^{1/2} < \infty, \ \ (\mathbf{1pt})$$

car $\dfrac{dv}{dx} \in L^2(0,2)$ et $\dfrac{du}{dx} \in L^2(0,2)$. D'autre part

$$\int_0^2 |F(u(x))||v(x)|dx \leq 2\int_0^2 |u(x)||v(x)|dx.$$

Comme

$$\int_0^2 |u(x)||v(x)|dx \leq \big(\int_0^2 |u(x)|^2\big)^{1/2}\big(\int_0^2 |v(x)|^2\big)^{1/2}$$

où $u \in L^2(0,2)$ et $v \in L^2(0,2)$. On conclut alors

$$\int_0^2 |F(u(x))||v(x)|dx \leq 2\big(\int_0^2 |u(x)|^2\big)^{1/2}\big(\int_0^2 |v(x)|^2\big)^{1/2} < \infty. \ \ (\mathbf{2pts})$$

2- La solution de (1) dans $L^2(0,2)$ est définie,

$$\int_0^2 u(x)\frac{d^2v}{dx^2}(x)dx + \int_0^2 u(x)v(x)dx = \int_0^2 F(u(x))v(x)dx, \ \ (\mathbf{1pt})$$

pour tout $v \in C_K^2(0,2)$. En effet

$$\begin{aligned}\int_0^2 u(x)\frac{d^2v}{dx^2}(x)dx &\leq \sup_{x\in K}|\frac{d^2v}{dx^2}(x)|\int_0^2 |u(x)|dx \\ &\leq \sqrt{2}\sup_{x\in K}|\frac{d^2v}{dx^2}(x)|\big(\int_0^2 |u(x)|^2 dx\big)^{1/2} < \infty, \ \ (\mathbf{2pts})\end{aligned}$$

car $u \in L^2(0,2)$ et $v'' \in C_K(0,2)$.

3- Puisque $F(0) = 0$ alors le seul point qu'on peut observer est zéro et celui ci est une solution constante il vérifie aussi les conditions de Neumann. **(1pt)**

4- Posons $v(x) = u(x) - u^*$, et utilisons le fait que $F(u^*) = u^*$, (en fait remarquer que seule $u^* = 0$, est solution constante (1)) on trouve

$$\begin{aligned}-v'' + v &= F(v+u^*) - F(u^*), \\ &= \frac{\partial F}{\partial v}(u^*)v + o(v^2)\end{aligned}$$

Le problème linéarisé est alors donné comme suit

$$\begin{cases} -v'' + v = F'(u^*)v, \quad x \in (0,2), \\ v(0) = v(2) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

ou bien

$$\begin{cases} -v'' = \dfrac{2}{(1+u^*)^2}v, \quad x \in (0,2), \\ v(0) = v(2) = 0. \ (\mathbf{1pt}) \end{cases}$$

Pour $u^* = 0$ on trouve

$$\begin{cases} -v'' = 2v, \quad x \in (0,2), \\ v(0) = v(2) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 (8pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) = f(x), \ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où f est une fonction suffisamment régulière.

Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) - \frac{u_{i+1}-u_i}{h} = f_i, \ i = 1, ..., N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

où $f_i = f(x_i)$. Posons $F_h = (f_1, f_2, ..., f_N)^t$ et $U_h = (u_1, u_2, ..., u_N)^t$.

1- Donner la définition de l'erreur de consistance pour le problème (3).

2- Montrer que si $F_h \geq 0$ alors $U_h \geq 0$.

3- En déduire l'existence et l'unicité de la suite U_h.

Correction de l'exercice 2

1- l'erreur de consistance est donnée comme suit

$$R_i = \frac{1}{h^2}(2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - f(x_i). \ (\mathbf{1pt})$$

2- Soit $p = \min\{i = 1, ..., N; u_i = \min\limits_{j=1,...,N} u_j\}$ **(1pt)**

Alors u_p vérifie,

$$\frac{1}{h^2}(u_p - u_{p-1}) + \frac{1}{h^2}(u_p - u_{p+1}) - \frac{u_{p+1} - u_p}{h} \geq 0. \tag{4}$$

Supposons maintenant que $p = 2, ..., N-1$, alors l'inégalité (4) est impossible, car par la définition de p on a $u_p - u_{p-1} < 0$, $u_p - u_{p+1} \leq 0$ et $-(u_{p+1} - u_p) \leq 0$. **(2pts)**

A présent, si $p = 1$ on a

$$\frac{1}{h^2}(u_1 - u_0) + \frac{1}{h^2}(u_1 - u_2) - \frac{u_2 - u_1}{h} \geq 0. \tag{5}$$

Puisque $u_1 - u_2 \le 0$ et $-\frac{u_2-u_1}{h} \le 0$ alors on a nécessairement $u_1 \ge u_0 = 0$. **(1pt)**

Si $p = N$ alors on a

$$\frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h^2}(u_N - u_{N+1}) - \frac{u_{N+1} - u_N}{h} \ge 0.$$

On réécrit cette inégalité comme suit

$$\frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \big(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\big)(u_N - u_{N+1}) \ge 0.$$

Donc puisque $u_N - u_{N-1} < 0$ et $\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} \ge 0$ alors on a nécessairement $u_N \ge u_{N+1} = 0$. **(1pt)**

En conclusion $u_i \ge 0$ pour tout $i = 1, ..., N$.

3- On écrit le système (3) comme suit, $A_h U_h = F_h$. Supposons à présent que $A_h U_h = 0$ alors $A_h U_h \ge 0$ d'après ce qui précède $U_h \ge 0$. D'autre part $A_h U_h = 0$ implique aussi que $A_h U_h \le 0$ où bien $A_h(-U_h) \ge 0$ toujours de ce qui précède on trouve $-U_h \ge 0$ ou bien $U_h \le 0$. En combinant les deux résultats on trouve que $U_h = 0$. On conclut que A_h est inversible et $U_h = A_h^{-1} F_h$. **(2pts)**