Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2023-2024
Module : Contrôle optimal
Date : 21-05-2024

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL.

Exercice 1 : Contrôle optimal d'une épidémie : 11 points.

On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{S}(t) = -u(t)S(t)I(t) - kv(t)S(t),\ t \in [0,T], \\ \dot{I}(t) = u(t)S(t)I(t) - \alpha I(t),\ t \in [0,T], \\ S(0) = S_0,\ I(0) = I_0, \\ \min \int_0^T I(t)dt. \end{cases}$$

où $T > 0$ fixé, $S(t)$ (resp. $I(t)$) est la taille de la population sensible (resp. infectée) au temps t. Il y en a deux variables de contrôle, le taux de confinement u et le taux de vaccination v. Deux paramètres donnés sont $\alpha > 0$ et $k > 0$ (efficacité de la vaccination). On suppose que $S_0 > 0$ et $I_0 > 0$ et les contrôles $u \in L^1([0,T];[M_1,M_2])$ et $v \in L^1([0,T];[0,M_3])$ avec $0 < M_1 < M_2$ et $M_3 > 0$.

De plus on admet que pour tout contrôle u et tout contrôle v, le problème initial suivant

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -u(t)S(t)I(t) - kv(t)S(t),\ t \in [0,T], \\ \dot{I}(t) = u(t)S(t)I(t) - \alpha I(t),\ t \in [0,T], \\ S(0) = S_0,\ I(0) = I_0. \end{cases}$$

admet une unique solution globale (S,I) avec $S(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$ et $I(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

1) On note par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ le vecteur adjoint, (u^*, v^*) le contrôle optimal et (S^*, I^*) la trajectoire optimale.

1.1) Écrire le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (1).

1.2) Écrire les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

1.3) Écrire les conditions de transversalité $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$.

2)

2.1) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial u}$ et $\frac{\partial H}{\partial v}$.

2.2) En déduire que

$$u^*(t) = \begin{cases} M_1 \text{ si } \lambda_2(t) > \lambda_1(t), \\ M_2 \text{ si } \lambda_2(t) < \lambda_1(t), \end{cases}$$

et

$$v^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_1(t) < 0, \\ M_3 \text{ si } \lambda_1(t) > 0. \end{cases}$$

3) Pour tout $t \in [0,T]$, on pose par définition $q(t) = \lambda_2(t) - \lambda_1(t)$.

3.1) Calculer $\dot{q}(T)$.

3.2) En déduire que $u^* = M_1$ sur $[T-\varepsilon, T]$, avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit.

3.3) Montrer que $v^* = M_3$ sur $[T-\varepsilon_1, T]$, avec $\varepsilon_1 > 0$ suffisament petit.

Exercice 2 : Contrôle optimal de la vitesse d'un véhicule : 09 points.

Un véhicule de masse unitaire a une vitesse v. Une force u peut être appliquée et un terme de traînée linéaire agit sur le véhicule, de telle sorte que la dynamique du véhicule est

$$\dot{v}(t) = u(t) - v(t).$$

Initialement le véhicule est à l'arrêt, c'est-à-dire $v(0) = 0$. Le but est de conduire le véhicule en temps minimum T à une vitesse $v(T) = 1$. En résumé, on a le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = u(t) - v(t),\ t \in [0,T], \\ v(0) = 0,\ v(T) = 1, \\ \min(T), \end{cases} \tag{2}$$

où $u \in L^1([0,T];[-M,M])$ avec $M = \frac{1}{1-e^{-10}}$.

On note par λ le vecteur adjoint, u^* le contrôle optimal et v^* la vitesse optimale.

1) Écrire le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (2).

2) Écrire l'équation de l'extrémale sur le vecteur adjoint.

3) En utilisant la condition de tranversalité sur le Hamiltonien en temps final T, montrer que $\lambda(t) \neq 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

4) En utilisant la condition de minimisation de Pontriaguine donner l'expression du contrôle optimal u^* en fonction du vecteur adjoint λ.

5) Montrer que $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

6) En déduire que $u^* = M$, sur $[0,T]$.

7) En déduire l'expression explicite de la vitesse optimale v^* et la valeur de T.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. : 2023-2024
Module : Contrôle optimal.

Corrigé de l'examen final du mardi 21 mai 2024.

Exercice 1 : 11 points

1)

1.1) Le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (1) est donné par

$$H(S(t), I(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t), v(t))$$
$$= \lambda_1(t)[-u(t)S(t)I(t) - k\,v(t)S(t)]$$
$$+ \lambda_2(t)[u(t)S(t)I(t) - \alpha I(t)] + I(t).$$

1 pt.

1.2) Les équations des extrémales sur le vecteur adjoint

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial S}(S^*(t), I^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u^*(t), v^*(t))$$ 0,25pts

$$= (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\,u^*(t)\,I^*(t) + k\,\lambda_1(t)\,v^*(t).$$ 0,75pts

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial I}\left(S^*(t), I^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u^*(t), v^*(t)\right)$$ 0,25 pts

$$= \left(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\right)u^*(t)\,S^*(t) + \alpha\,\lambda_2(t) - 1.$$ 0,75 pts

1.3) Les conditions de transversalité $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$.

Comme $\Psi(S(T), I(T)) = 0$, alors on a

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial S}\left(S^*(T), I^*(T)\right) = 0,$$ 0,5 pts

et

$$\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial I}\left(S^*(T), I^*(T)\right) = 0$$ 0,5 pts

2)

2.1)

$$\frac{\partial H}{\partial u}\left(S(t), I(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t), v(t)\right)$$

$$= \left(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\right) S(t)\, I(t),$$ 1 pt

et

$$\frac{\partial H}{\partial v}\left(S(t), I(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t), v(t)\right)$$

$$= -k\,\lambda_1(t)\,S(t).$$ 1 pt

2.2) D'aprés le principe de minimisation de Pontriaguine, on a

$$H\left(S^*(t), I^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u^*(t), v^*(t)\right)$$

$$= \min_{(u,v)\in[M_1,M_2]\times[0,M_3]} H\left(S^*(t), I^*(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u, v\right).$$ 0,5 pts

Ce qui donne,

$$\left(\lambda_2(t)-\lambda_1(t)\right)u^*(t)S^*(t)I^*(t)-k\lambda_1(t)v^*(t)S^*(t)$$

$$=\min_{(u,v)\in[M_1,M_2]\times[0,M_3]}\left\{\left(\lambda_2(t)-\lambda_1(t)\right)u\,S^*(t)I^*(t)-k\lambda_1(t)\,v\,S^*(t)\right\}.$$

Comme le Hamiltonien est linéaire en u et v, $S^*(t)>0$ et $I^*(t)>0$, pour tout $t\in[0,T]$ et en utilisant la question précédente, on obtient

$$u^*(t)=\begin{cases} M_1 & \text{si } \lambda_1(t)<\lambda_2(t) \\ M_2 & \text{si } \lambda_1(t)>\lambda_2(t), \end{cases}$$ 0,5 pts

et

$$v^*(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_1(t)<0 \\ M_3 & \text{si } \lambda_1(t)>0. \end{cases}$$ 0,5 pts

3)

3.1) On a,

$$\dot{q}(t)=\dot{\lambda}_2(t)-\dot{\lambda}_1(t)$$
$$=\left(\lambda_2(t)-\lambda_1(t)\right)u^*(t)\left(I^*(t)-S^*(t)\right)+\alpha\lambda_2(t)-1-k\lambda_1(t)v^*(t)$$

Comme $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0$, on obtient

$$\dot{q}(T) = -1.$$

1 pt.

3.2) Comme $\dot{q}(T) < 0$ et $q(T) = \lambda_2(T) - \lambda_1(T) = 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ suffisament petit tel que $q(t) > 0$, pour tout $t \in [T-\varepsilon, T)$, c'est-à-dire $\lambda_2(t) > \lambda_1(t)$, pour tout $t \in [T-\varepsilon, T)$. Par suite d'après la question 2.2), on a

1 pt

$u^* = M_1$ sur $[T-\varepsilon, T]$.

3.3) On a,

$$\dot{\lambda}_1(t) = \big(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\big) u^*(t)\, I^*(t) + k\,\lambda_1(t)\, v^*(t)$$

$$< k\,\lambda_1(t)\, v^*(t), \quad \text{pour tout } t \in [T-\varepsilon, T).$$

Alors,

$$\left(e^{k\int_t^T v^*(s)\,ds}\, \lambda_1(t)\right)' < 0, \quad \text{pour tout } t \in [T-\varepsilon, T).$$

Par suite, on a

La fonction $t \longmapsto e^{k\int_t^T v^*(s)\,ds}\, \lambda_1(t)$ est strictement décroissante et comme elle est continue et $e^{k\int_T^T v^*(s)\,ds}\, \lambda_1(T) = \lambda_1(T) = 0$, on obtient

$\forall t \in [T-\varepsilon, T)$, $e^{k\int_t^T v^*(s)ds} \lambda_1(t) > 0$.

Alors, $\forall t \in [T-\varepsilon, T)$, $\lambda_1(t) > 0$, 1,5 pts

et par conséquent d'après la question 2.2), on a

$v^* = M_3$ sur $[T-\varepsilon, T]$.

Remarque : Pour cette dernière question, on peut prendre

$\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Exercice 2 : 09 points

1) Le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (2) est donné par

$$H(u(t), v(t), \lambda(t)) = \lambda(t)\,(u(t) - v(t)).$$ 1 pt.

2) On a,

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial v}(u^*(t), v^*(t), \lambda(t))$$ 0,25 pts

$$= \lambda(t), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$ 0,75 pts

3) On a,

$$H(u^*(T), v^*(T), \lambda(T)) = -\lambda_0 \Psi'(T),$$

avec $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et $\Psi(T) = T$.

C'est-à-dire,

$$\lambda(T)\left(u^*(T) - v^*(T)\right) + \lambda_0 = 0. \quad (*)$$

1pt.

D'après la question précédente, on a

$$\lambda(t) = c e^t, \text{ pour tout } t \in [0,T] \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

S'il existe un point $t_0 \in [0,T]$ tel que $\lambda(t_0) = 0$, alors $\lambda(t) = 0$, pour tout $t \in [0,T]$ et par suite d'après $(*)$, on a $\lambda_0 = 0$, ce qui contredit le principe du minimum de Pontriaguine on a toujours $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$.

1pt.

En conclusion $\lambda(t) \neq 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

4) D'après le principe de minimisation de Pontriaguine, on a

$$H(u^*(t), v^*(t), \lambda(t)) = \min_{w \in [-M,M]} H(w, v^*(t), \lambda(t)).$$

0,5 pts

C'est-à-dire,

$$\lambda(t)\left(u^*(t)-v^*(t)\right)=\min_{w\in[-M,M]}\left[\lambda(t)\left(w-v^*(t)\right)\right]$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t)\,u^*(t)=\min_{w\in[-M,M]}\lambda(t)\,w$$

0,5 pts

Alors,

$$u^*(t)=\begin{cases}-M & \text{si } \lambda(t)>0,\\ M & \text{si } \lambda(t)<0.\end{cases}$$

5) Montrons que $\lambda(t)<0$, pour tout $t\in[0,T]$.

Comme $\lambda(t)=c\,e^{t}$, avec $c\in\mathbb{R}^*$, alors $\lambda(t)>0$, pour tout $t\in[0,T]$ ou $\lambda(t)<0$, pour tout $t\in[0,T]$.

Supposons que $\lambda(t)>0$, pour tout $t\in[0,T]$, alors d'après la question précédente $u^*(t)=-M$, pour $t\in[0,T]$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{v}^*(t) = -M - v(t), & t \in [0,T] \\ v^*(0) = 0, & v^*(T) = 1. \end{cases}$$

D'après l'équation différentielle, on a

$$\left(e^t v^*(t)\right)' = -M e^t, \quad t \in [0,T].$$

Alors,

$$e^T v^*(T) - v^*(0) = -M\,(e^T - 1)$$

C'est-à-dire,

2pts

$$e^T = -M(e^T - 1) \quad \text{contradiction.}$$

Alors l'hypothèse $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$ est fausse

et par suite $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

6) D'après les questions 4) et 5), on a $u^* = M$ sur $[0,T]$.

1pt.

7) On a,

$$\begin{cases} \dot{v}^*(t) = M - v^*(t), & t \in [0,T], \\ v^*(0) = 0, & v^*(T) = 1. \end{cases}$$

Comme $v^*(0)=0$, alors d'après l'équation différentielle on a,

$$v^*(t) = M(1 - e^{-t}), \quad t \in [0, T].$$

1pt.

Maintenant la condition $v^*(T)=1$ donne

$$1 = M(1 - e^{-T}).$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{M} = 1 - e^{-T}.$$

Comme $M = \frac{1}{1 - e^{-10}}$, on obtient

$$1 - e^{-10} = 1 - e^{-T}$$

Ce qui donne, $\boxed{T = 10.}$