Université de Tlemcen
Département de Mathématiques , Faculté des sciences
Masetr biomath1, 2023-2024
Module: Théorie de bifurcations

Controle continue(1h 30')

Exercice1: (06 pts) Soit l'équation

$$\theta'' = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta, \tag{S}$$

où ω est un paramètre réel.
Etudier la nature de bifurcation .
Solution:
le système peut s'écrire (**01.5 pts)**

$$\begin{cases} \theta' = \eta \\ \eta' = \left(\alpha^2(\cos\theta - \beta\right)\sin\theta \end{cases}$$

où

$$\beta = \frac{g}{R}$$

On remarque que $(0,0)$ est un point d'équilibre .La Jacobienne donne **(0.5 pt)**

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha < \sqrt{\beta}$, alors les valeurs propres (**01 pts)** sont

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\beta - \alpha^2}$$

et si $\alpha > \sqrt{\beta}$, alors les valeurs propres **(01 pts)** sont

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

on en déduit que si $\alpha < \sqrt{\beta}$, le seul point d'équilibre est $(0,0)$, et on peut montrer qu'il est satble (**0.5 pts**).Si$\alpha > \sqrt{\beta}$, il y a naissance de 2 autres points d'équilibres **(0.5 pts)** $\left(\pm ar\cos\frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta}, 0\right)$.

Conclusion.Nous obtenons une bifurcation fourche **(0.5 pts)** .Diagramme de bifurcation (**0 .5pts**)

Exercice 2: **(07 pts)** Soit le système

$$S_\mu \quad \begin{cases} x' = -y + \mu x + xy^2 \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{cases} \qquad \mu \in R^+ \text{ un paramètre}$$

a) Montrer que le système (S_μ) admet une bifurcation de Hopf au voisinage de $(0,0)$.

b) Donner la nature de cette bifurcation.

Solution:
la matrice jacobienne est (**0.5 pts)**

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

les valeurs propores sont(**01 pts)**

$$\lambda_1 = \mu + i,\ \lambda_2 = \mu - i$$

les conditions d'une bifurcation de Hopf sont réunies.(**02.5 pts)**
b) .Un calcul simple de l'indice de Marsden McCraken donne que la bifurcation est sous critique.**03. pts)**

Exercice 3:**(07 pts)** Soit le système

$$\begin{cases} x' = xy + ax^3 + by^2x \\ y' = -y + cx^2 + dx^2y \end{cases}$$

Discuter la stabilité de $(0,0)$ en effectuant une réduction du système sur la variété centre.
Solution: La variété centre existe **(01 pt) ,**et elle est donnée par

$$\{(x,y) : y = h(x)\}$$

un calcul simple montre que

$$h(x) = cx^2 + \mathrm{O}(x^4) \quad \textbf{(2 pts)}$$

La projection sur la variété centre donne le système réduit

$$u' = (a+c)\,u^3 + O(u^5) \qquad \textbf{(1 pt)}$$

le point $(0,0)$ est stable si $(a+c) < 0$ et instable si $(a+c) > 0$. **(1pt)**
Si $(a+c) = 0$, on pousse les calculs à l'ordre supérieur et on retrouve

$$h(x) = cx^2 + cdx^4 \ + O(x^6) \quad \textbf{(1pts)}$$

Si $cd + bc^2 > 0$, l'orgine est instable et il est stable si $cd + bc^2 < 0$. (**1pt**)