Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U 2023/2024

Sujet + Corrigé : Test n° 01

Méthodes de Réduction II (Master BioMod.)

Soit le système singulièrement perturbé écrit en coordonnées cylindriques.

$$(S_\varepsilon)\quad \begin{cases} \varepsilon \dot r = r\left((1-r)^3 + \varepsilon r \sin\theta\right), & r(0) = \alpha^2+\beta^2,\ \alpha \neq 0 \\ \varepsilon \dot\theta = 1 + \varepsilon z^2, & \theta(0) = \operatorname{Arctg}\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \dot z = -z\, r^2 \cos^2\theta & z(0) = \delta. \end{cases}$$

(1) Déterminer l'équation rapide de (S_ε). Étudier le comportement asymptotique de ses solutions. Tracer quelques trajectoires dans l'espace $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

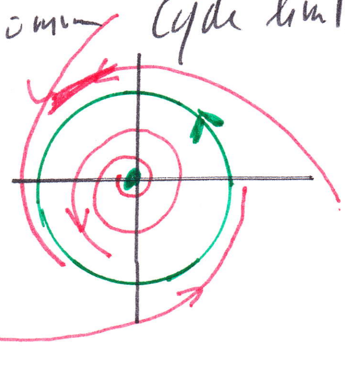
Rép. Tous les systèmes dans ce problème ont la propriété d'existence et d'unicité des solutions pour toute C.I préalablement fixée.

Equation rapide : (ER) $\begin{cases} r' = r(1-r)^3 \\ \theta' = 1 \end{cases}$ $\quad (') = \dfrac{d}{d\tau},\ \tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, z paramètre.

Ligne de r' : $0 \xrightarrow{+} 1 \xleftarrow{-}$

$r=0$ correspond à $(0,0)$ comme équilibre instable dans (xoy)

$r=1$ " " $\Gamma_z = C(0,1)$ comme cycle limite stable.



(2) Appliquer le théorème de Pontryagin-Rodygin sur un intervalle de temps borné $[0,T]$. Calculer explicitement la solution du problème réduit.

Rép : • Donnons une famille de solutions périodiques $(x_z^*(\tau), y_z^*(\tau))$ de (EA) d'orbite Γ_z.

$\theta' = 1 \Rightarrow \theta(\tau) = \tau + C$. Choisir $C = 0$.

Comme $r(\tau) = 1$ sur Γ_z, on a $(x_z^*(\tau), y_z^*(\tau)) = (\cos\tau, \sin\tau)$.

$1 \cdot \cos\underbrace{\theta(\tau)}_{\tau}$ $\quad 1 \cdot \sin\underbrace{\theta(\tau)}_{\tau}$

C'est une famille de solutions 2π-périodiques, de période indépendante de z (donc continue $/z$), d'orbite $\Gamma_z = \mathcal{C}(0,1)$, $\forall z$ (donc unifmt stables $/z$)

• Équation lente (moyennisée)

(EL). $\boxed{\dot z} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x_z^*(\tau), y_z^*(\tau), z, 0)\, d\tau$

où $g(x,y,z,\varepsilon) = -z x^2$

$= \dfrac{-z}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x_z^{*2}(\tau)\, d\tau = -\dfrac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\tau\, d\tau$

$= (\dots) = \boxed{-\dfrac{z}{2}}$ $\qquad z \in \underset{\text{cpt}}{K} \subset \mathbb{R}$

• (ECL) $\begin{cases} r' = r(1-r)^3 & r(0) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \theta' = 1 & \theta(0) = \operatorname{Arctg}\dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$

• (PR). $\dot z = -\dfrac{1}{2} z$, $z(0) = \delta$, avec $\delta \in \overset{\circ}{K}$

Par hypothèse ~~on suppose~~ que (α, β) est dans le bassin d'attraction de Γ_z.

La solution de (PR) est $\bar{z}(t) = \delta e^{-\frac{t}{2}}$.

Soit $T > 0$ fixé. (ici arbitraire car $\bar{z}(t)$ est définie $\forall t \geq 0$).

D'après le théorème de Pontryagin-Rodygin, pour ε assez petit, la solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ de (S_ε) est définie au moins sur $[0, T]$ et vérifie

- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (x(\varepsilon\tau, \varepsilon), y(\varepsilon\tau, \varepsilon)) = (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \quad \forall \tau \geq 0$

  où $(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))$ est la sol. de (ECL),

- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} z(t,\varepsilon) = \bar{z}(t), \quad \forall t \in [0, T]$

- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname{dist}\left((x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)), \Gamma_{\bar{z}(t)} = C(\omega)\right) = 0 \quad \forall t \in]0, T]$.

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U 2023/2024

Sujet + Corrigé du Test n° 01
Méthodes de Réduction II (Master BioMod)

Soit le système singulièrement perturbé écrit en coordonnées cylindriques

$$(S_\varepsilon) \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -x + r\cos\theta \\ \dot{r} = r(r-1+\varepsilon)(r-1-\varepsilon)(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

où $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$, $0 < \varepsilon \ll 1$

(1) Montrer que l'équation lente associée à (S_ε) admet un cycle limite Γ stable.

Rép : Comme la dynamique lente est ici indépendante de la dynamique rapide, on peut directement former l'équation lente en posant $\varepsilon = 0$ dans les 2 dernières équations de (S_ε),

$$(E.L) \begin{cases} \dot{r} = r(r-1)^2(1-r^2) = -r(r-1)^3(1+r) \\ \dot{\theta} = 1 \leftarrow \text{(indépt de } r\text{)} \end{cases}$$

Signe de $\dot{r}$:

r	0		1	
$\dot{r}$		$+$		$-$

- $r = 0$ correspond à $(0,0)$ instable dans le repère $(y_1 o y_2)$.
- $r = 1$ équilibre A. stable de la $1^{ère}$ équation de $(E.L)$, correspondant au cycle $\Gamma = C(0,1)$ asymptotiquement stable.

Cl. $(E.L)$ admet bien un cycle limite stable dans $(y_1 o y_2)$.

Rem. (S_ε) ainsi que tous les systèmes de comparaison ont la propriété d'unicité des solutions pour toute C.I fixée.

② Montrer que le sous-ensemble $\xi(\Gamma)\times\Gamma$ de $\mathbb{R}^3$, où ξ est une fonction à déterminer, est PAS qd $\varepsilon \to 0$ pour (S_ε).

Rep. • Équation rapide :

$$(ER) \quad x' = -x + y_1 \quad , \quad ()' = \frac{d}{d\tau} \, , \; \tau = \frac{t}{\varepsilon}$$

y_1, y_2 paramètres
(ou r, θ paramètres)

• Variété lente : $x = \xi(y_1, y_2) = y_1$ (plan bissecteur)

• Attractivité de la variété lente : $\frac{\partial}{\partial x}(-x + y_1) = -1 < 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in K$,

$K \underset{cpt}{\subset} \mathbb{R}^2$, tel que $\Gamma \not\subset K$.

La variété lente donnée par $\begin{array}{l} K \longrightarrow \mathbb{R} \\ (y_1, y_2) \longmapsto x = \xi(y_1, y_2) \end{array}$, isolée,

est unift attractive.

• Équation de la couche limite $\underset{(ECL)}{x'} = -x + y_1(0)$, $x(0)$ donné.

de solution $\tilde{x}(\tau)$, $\tau \geq 0$.

• Problème réduit : $(PR) \quad \begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)^3(1+r) & r(0) = \sqrt{y_1^2(0) + y_2^2(0)} \\ \dot{\theta} = 1 & \theta(0) = \operatorname{Arctg} \frac{y_2(0)}{y_1(0)} \end{cases}$

de solution $(\bar{r}(t), \bar{\theta}(t))$ correspondant, dans $(y_1 o y_2)$, à $(\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t))$. $\quad (y_1, y_2 \in K)$

Si $r(0) \neq 0$, $(\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t))$ est définie pour tout $t \geq 0$

et $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}\left((\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)), \Gamma\right) = 0$.

D'après le théorème de Tikhonov étendu aux temps infinis (cas spécial où (E.L) admet un cycle limite stable), on a que toute solution $(x(t,\varepsilon), y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon))$ de (S_ε) telle que ~~…~~ $y_1^2(0,\varepsilon) + y_2^2(0,\varepsilon) \neq 0$, est définie pour tout $t \geq 0$ pour ε assez petit et vérifie entre autres que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \xi(y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon)) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)) \quad \forall\, t \geq 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t,\varepsilon) = \xi(\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)) \quad \forall\, t > 0.$$

Comme

$$\operatorname{dis}((\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)), \Gamma) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

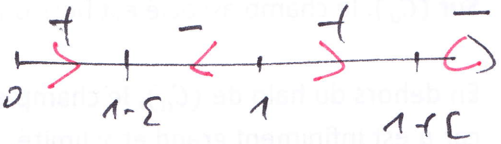
$$\operatorname{dis} \xi(\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)) \longrightarrow \xi(\Gamma),$$

on peut déduire que $\xi(\Gamma) \times \Gamma$ est PAS quand $\varepsilon \to 0$ pour (S_ε). En fait, il est SGPAS quand $\varepsilon \to 0$ pour (S_ε) pour toute C.I. non nulle.

③ Qu'en est-il du vrai statut de $\xi(\Gamma) \times \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ pour (S_ε).

L'équation lente 'exacte' (i.e où ε n'est pas négligé) est

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1-\varepsilon)(r-1+\varepsilon)(1-r^4) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



a en vérité 3 cycles limites

$C(0,1-\varepsilon)$, $\Gamma = C(1,0)$, $C(0,1+\varepsilon)$. Les 2 extrêmes sont stables et Γ est en fait instable.

On peut en déduire que $\xi(\Gamma) \times \Gamma$, si c'est un cycle limite, est instable pour toute valeur de ε !