Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2023-2024
Module : Contrôle optimal
Date : 09-05-2024

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

CONTRÔLE CONTINU.

Exercice 1 : Contrôle d'un réacteur chimique : 10 points.

On considère un réacteur chimique avec deux espèces dont les concentrations sont notées (x_1, x_2). On peut piloter le fonctionnement du réacteur par un contrôle u à valeurs dans $U = [0,1]$ (on pourra penser à une température normalisée). Lorsque $u = 0$, l'espèce 1 est produite à taux α et rien ne se passe pour l'espèce 2 (sa concentration reste constante). Lorsque $u = 1$, l'espèce 1 est consommée à taux β et l'espèce 2 est produite à taux γ à partir de l'espèce 1. Les paramètres α, β, γ sont des réels strictement positifs. Lorsque le contrôle u prend des valeurs entre 0 et 1, le comportement du réacteur est décrit par interpolation linéaire entre les deux situations décrites ci-dessus. Notre objectif est de trouver un contrôle optimal u^* de façon à de minimiser $-x_2(T)$. En résumé, on a le problème de contrôle optimal suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = (\alpha - (\alpha+\beta)\, u(t))\, x_1(t),\ t \in [0,T], \\ x_2'(t) = \gamma u(t)\, x_1(t),\ t \in [0,T], \\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0, \\ \min(-x_2(T)), \end{cases}$$

où $T > 0$ fixé est la durée de fonctionnement, $x_1^0 > 0$, $x_2^0 \geq 0$. On considère des contrôles dans $\mathscr{U} = L_\infty([0,T];U)$.

1) Montrer que $x_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

2) Écrire le Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal (1).

3) On note par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ le vecteur adjoint.

(a) Écrire les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

(b) Écrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

(c) En déduire des questions (a) et (b) que $\lambda_2(t) = -1$, pour tout $t \in [0,T]$.

(d) En utilisant la condition de minimisation de Pontriaguine montrer que le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } (\alpha+\beta)\,\lambda_1(t) + \gamma < 0, \\ 1 \text{ si } (\alpha+\beta)\,\lambda_1(t) + \gamma > 0. \end{cases}$$

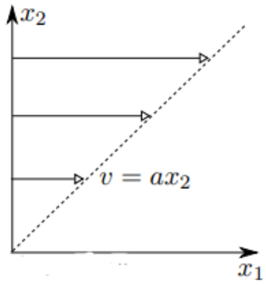
(e) En déduire que $u^*(t) = 1$ sur $[T-\varepsilon, T]$, avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit.

(f) Pour tout $t \in [0,T]$, on pose par définition $\varphi(t) = (\alpha+\beta)\,\lambda_1(t) + \gamma$. Soit t_0 un temps tel que $\varphi(t_0) = 0$. Démontrer qu'alors on a nécessairement $\varphi'(t_0) \neq 0$ et en déduire que l'ensemble $\{t \in [0,T] /\ \varphi(t) = 0\}$ est de mesure nulle.

(g) Que peut-on en déduire sur le contrôle optimal u^* ?

Exercice 2 : 10 points.

Considérons une rivière suffisamment large et droite, où la vitesse de l'eau v augmente linéairement avec la distance x_2 de la rive de la rivière, c'est-à-dire $v(x_2) = ax_2$, avec $a > 0$ et $x_2 > 0$.



La dynamique d'un bateau sur la rivière est donnée par

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = ax_2(t) + u_1(t), \ t \in [0,T], \\ x_2'(t) = u_2(t), t \in [0,T], \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \end{cases}$$

où x_1 est la position du bateau le long de la rive droite du fleuve, x_2 est la distance du rive de la rivière, u_1, u_2 sont les entrées le long de x_1 et x_2 avec $|u_i| \leq 1$, pour $i = 1,2$ et $T > 0$ est fixé.

Notre objectif est de minimiser $-x_1(T)$, où $x_1(T)$ représente la distance parcourue le long de la rive du fleuve.

1) Écrire le Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal (2).

2) On note par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ le vecteur adjoint.

(a) Écrire les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

(b) Écrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

(c) En déduire des questions (a) et (b) que $\lambda_1(t) = -1$ et $\lambda_2(t) = a(t-T)$, pour tout $t \in [0,T]$.

(d) En utilisant la condition de minimisation de Pontriaguine déterminer le contrôle optimal (u_1^*, u_2^*).

(e) En utilisant la condition de minimisation de Pontriaguine déterminer le contrôle optimal (u_1^*, u_2^*) si on remplace la contrainte $|u_i| \leq 1$, pour $i = 1,2$ par $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

A. U. : 2023-2024

Module : Contrôle optimal

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé du contrôle continu.

Exercice 1 : 10 points.

1) Montrons que $x_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$.

1ère méthode : Supposons par absurde qu'il existe un point $t_* \in]0, T]$ tels que $x_1(t_*) = 0$ et $x_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0, t_*[$.

1pt.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x_1'(t) = (\alpha - (\alpha+\beta)u(t))\, x_1(t), \\ x_1(t_*) = 0. \end{cases} \quad (Ch)$$

Le problème de Cauchy (Ch) admet deux solutions la fonction x_1 et la fonction identiquement nulle. Contradiction car le problème de Cauchy (Ch) admet une unique solution d'après le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

$2^{\text{ème}}$ méthode :

On a, $\begin{cases} x_1'(t) = (\alpha - (\alpha+\beta)u(t))\, x_1(t), \ t \in [0,T], \\ x_1(0) = x_1^0 \end{cases}$

1pt.

Alors

$$x_1(t) = x_1^0 \, e^{\int_0^t (\alpha - (\alpha+\beta)u(s))ds}, \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

> 0 car $x_1^0 > 0$ et $e^{\int_0^t (\alpha - (\alpha+\beta)u(s))ds} > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

2- Le Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal (1) est donné par

1pt.

$H(x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t))$

$= \lambda_1(t)\left(\alpha - (\alpha+\beta)u(t)\right) x_1(t) + \lambda_2(t)\, \gamma\, u(t)\, x_1(t).$

3-

(a) Les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

Pour presque tout $t \in [0,T]$, on a

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, u^*),$$ 0,25 pts

où u^* est le contrôle optimal et (x_1^*, x_2^*) est la trajectoire optimale.

Ce qui donne,

$$\lambda_1'(t) = \big((\alpha+\beta)u(t) - \alpha\big)\lambda_1(t) - \gamma u(t)\lambda_2(t).$$ 0,75 pts

De même, pour presque tout $t \in [0,T]$, on a

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, u^*)$$ 0,25 pts

$$= 0.$$ 0,75 pts

(b) Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

On a,

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1^*(T), x_2^*(T))$$ 0,25 pts

$$= 0 \text{ car } \Psi(x_1(T), x_2(T)) = -x_2(T),$$ 0,25 pts

et $$\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1^*(T), x_2^*(T)) = -1.$$ 0,25 pts 0,25 pts

(c) Comme

$$\begin{cases} \lambda_2'(t) = 0, \text{ pour presque tout } t \in [0,T], \\ \lambda_2(T) = -1. \end{cases}$$

1 pt.

Alors,

$$\lambda_2(t) = -1, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

(d)

On a,

$$H(x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, u^*) = \min_{v \in [0,1]} H(x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, v).$$

0,5 pts

Ce qui donne,

$$\left[-(\alpha+\beta)\lambda_1(t) - \gamma\right] u^*(t)\, x_1(t) = \min_{v \in [0,1]} \left\{\left(-(\alpha+\beta)\lambda_1(t) - \gamma\right) v\, x_1(t)\right\}.$$

Comme $x_1(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$, on obtient

$$-\left[(\alpha+\beta)\lambda_1(t) + \gamma\right] u^*(t) = \min_{v \in [0,1]} \left\{-\left[(\alpha+\beta)\lambda_2(t) + \gamma\right] v\right\}.$$

Ce qui entraîne que,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\alpha+\beta)\lambda_1(t)+\gamma<0, \\ 1 & \text{si } (\alpha+\beta)\lambda_1(t)+\gamma>0. \end{cases}$$

0,5 pts

(e) Comme $(\alpha+\beta)\lambda_1(T)+\gamma=\gamma>0$, et la fonction $t\mapsto\lambda_1(t)$ est continue, alors il existe $\varepsilon>0$ suffisament petit tel que $(\alpha+\beta)\lambda_1(t)+\gamma>0$, pour tout $t\in[T-\varepsilon,T]$, ce qui entraine que $u^*(t)=1$, pour presque tout $t\in[T-\varepsilon,T]$.

1 pt.

(f) On a,

$$\begin{aligned} \varphi'(t_0) &= (\alpha+\beta)\lambda_1'(t_0) \\ &= (\alpha+\beta)\left[((\alpha+\beta)u(t_0)-\alpha)\lambda_1(t_0)+\gamma u(t_0)\right] \\ &= (\alpha+\beta)\left[-((\alpha+\beta)u(t_0)-\alpha)\frac{\gamma}{\alpha+\beta}+\gamma u(t_0)\right] \\ &= (\alpha+\beta)\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}=\alpha\gamma>0. \end{aligned}$$

0,5 pts

Alors les zéros de la fonction $t\mapsto\varphi(t)$ sont isolés et par conséquent l'ensemble $\{t\in[0,T]\,/\,\varphi(t)=0\}$ est de mesure nulle.

0,5 pts

(g) D'après les questions (d) et (f), il résulte que le contrôle optimal u^* est bang-bang.

1pt.

Exercice 2 : 10 points.

1) Le Hamiltonien H associé au problème de contrôle optimal (2) est donné par

1pt.

$$H(x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u_1(t), u_2(t)) = \lambda_1(t)(a x_2(t) + u_1(t)) + \lambda_2(t) u_2(t).$$

2)

(a) Les équations des extrémales sur le vecteur adjoint.

Pour presque tout $t \in [0, T]$, on a

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, u_1^*, u_2^*),$$

0,25 pts

où (u_1^*, u_2^*) est le contrôle optimal et (x_1^*, x_2^*) est la trajectoire optimale.

Ce qui donne,

0,75 pts

$$\lambda_1'(t) = 0.$$

De même, pour presque tout $t \in [0,T]$, on a

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, u_1^*, u_2^*)$$ 0,25 pts

$$= -a\lambda_1(t).$$ 0,75 pts

(b) Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

On a,

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1^*(T), x_2^*(T))$$ 0,25 pts

$$= -1 \quad \text{car } \Psi(x_1(T), x_2(T)) = -x_1(T),$$ 0,5 pts

et

$$\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1^*(T), x_2^*(T)) = 0.$$ 0,25 pts 0,5 pts

(c) On a,

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = 0, & t \in [0,T], \\ \lambda_1(T) = -1. \end{cases}$$ 1 pt.

Alors, $\lambda_1(t) = -1$, pour tout $t \in [0,T]$.

De même, $$\begin{cases} \lambda_2'(t) = a, & t \in [0,T], \\ \lambda_2(T) = 0. \end{cases}$$ 1 pt.

Alors, $\lambda_2(t) = a(t-T)$, pour tout $t \in [0,T]$.

(d) On a,

$$H(x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, u_1^*, u_2^*) = \min_{(v_1,v_2)\in[-1,1]^2} H(x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2).$$

0,5 pts

Ce qui donne,

$$\lambda_1(t)\, u_1^*(t) + \lambda_2(t)\, u_2^*(t) = \min_{(v_1,v_2)\in[-1,1]^2} \{\lambda_1(t) v_1 + \lambda_2(t) v_2\}.$$

C'est-à-dire,

$$-u_1^*(t) + a(t-T)\, u_2^*(t) = \min_{(v_1,v_2)\in[-1,1]^2} \{-v_1 + a(t-T) v_2\}.$$

1 pt.

Alors,

$$(u_1^*(t), u_2^*(t)) = (1,1), \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

(e) On a,

$$-u_1^*(t) + a(t-T)\, u_2^*(t) = \min_{(v_1,v_2)\in A} \{-v_1 + a(t-T) v_2\},$$ 0,5 pts

avec $A = \overline{B}(0,1)$: boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Comme le Hamiltonien est linéaire en v_1 et v_2 et la boule fermée A est convexe, alors la solution (u_1^*, u_2^*) se trouve sur le bord de A, c'est-à-dire sur le cercle de centre o et de rayon 1.

On a,
$$v_1^2 + v_2^2 = 1,$$
entraine que,
$$v_1 = \pm\sqrt{1-v_2^2}.$$
Comme $\lambda_1(t) = -1 < 0$, on prend $v_1 = +\sqrt{1-v_2^2}$.

Par suite,
$$-u_1^*(t) + a(t-T)\,u_2^*(t) = \min_{0\leq v_2\leq 1}\left\{-\sqrt{1-v_2^2} + a(t-T)\,v_2\right\}.$$ 0,5 pts

On pose,
$$h(v_2) = -\sqrt{1-v_2^2} + a(t-T)\,v_2, \quad 0\leq v_2\leq 1.$$

On a,
$$h(0) = -1, \quad h(1) = a(t-T),$$

et
$$h'(v_2) = \frac{v_2}{\sqrt{1-v_2^2}} + a(t-T), \qquad 0\leq v_2 < 1.$$

Alors,
$$h'(v_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{v_2}{\sqrt{1-v_2^2}} + a(t-T) = 0$$
$$\Rightarrow v_2 = \frac{a(T-t)}{\sqrt{1+a^2(t-T)^2}}$$

Comme

$$h''\left(\frac{a(T-t)}{\sqrt{1+a^2(t-T)^2}}\right) = \left(1+a^2(t-T)^2\right)^{\frac{3}{2}} > 0,$$

alors $v_2^* \overset{\text{déf}}{:=} \dfrac{a(T-t)}{\sqrt{1+a^2(t-T)^2}}$ est un minimum local pour h.

On a donc le tableau de variations suivant

v_2	0		v_2^*		1
$h'(v_2)$		$-$	0	$+$	
h	-1	$\searrow$	$-\sqrt{1+a^2(t-T)^2}$	$\nearrow$	$a(t-T)$

En conclusion le contrôle optimal (u_1^*, u_2^*) est donné par

1pt.

$$(u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2(t-T)^2}}, \frac{a(T-t)}{\sqrt{1+a^2(t-T)^2}}\right)$$