

Université de Tlemcen
 Département de Mathématiques, Module: Systèmes dynamiques, Juin 2024
 Master biomathématiques, Examen de Rattrapage, Durée 1h30'.

Exercice 1:08 pts Soit le système

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) = -x + x(x^2 + y^2) \\ y'(t) = -y + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

a) Montrer que l'ensemble

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

est positivement invariant i.e si $(x(0), y(0)) \in S$, alors $(x(t), y(t)) \in S$, pour tout $t \geq 0$.

Solution: il suffit de consulter les examens précédents.

Exercice2. 12 pts Soit le système

$$(2) \quad x'(t) = A(t)x, x \in R^2$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

- 1) Pour chaque t fixé, calculer les valeurs propres.
- 2) Montrer que

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t)e^{\frac{t}{2}} \\ \sin(t)e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

est une solution de (2).

- 3) Calculer $\|y(t)\|^2$, où $\|(a, b)\|^2 = a^2 + b^2$.
- 4) Le point d'équilibre $x = 0$ est-il stable ? Conclure.

Solution: Consulter les examens précédents.