Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année Master (2023/2024).
Faculté des Sciences Durée 1h30'.

# Rattrapage -Master Biomathématiques-
## Contrôle des Systèmes (M1)

**Exercice 1 (12 points)**

On considère le système **linéaire contrôlé à coefficients constants** $(S)$: $\dot{x} = Ax + Bu$ donné par ses éléments structurels suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le système donné n'est **pas contrôlable**.
2. Donner une **décomposition** du système en **sous-système contrôlable** et **sous-système non contrôlable.**
3. Donner **le retour d'état linéaire** qui **stabilise** le **sous-système contrôlable**, en plaçant ses pôles en $(-1)$.
4. Que pouvez-vous conclure maintenant sur la **stabilité asymptotique** du nouveau système **complet**?
5. On considère maintenant une sortie associée au système $(S)$ pour observer l**a deuxième composante** de l'état. Écrire le **système augmenté** par cette observation puis étudier son **observabilité**.

**Exercice 2 (08 points)**

Soit $(T > 0)$. On considère un modèle d'évolution de la maladie du SIDA in vivo contrôlé-observé, donné par :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = S(t)\left(1 - S(t)\right)(1 + u_1) - S(t)V(t) \\ \dot{I}(t) = -I(t) + S(t)V(t) \\ \dot{V}(t) = -V(t) + I(t) \\ y(t) = V(t) \end{cases} \qquad (t \in [0, T]) \qquad \text{(M)}$$

Sur le domaine : $\Omega = \{x = (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 / \;\; 0 < S < 1, \;\; V > 0\}$ et qui représentent respectivement la quantité de cellules saines, de cellules infectées et de virus présents dans le sang. $u \in \mathbb{R}$.

La sortie $y$ est choisie comme la quantité de virus en libre circulation dans le sang $V$, car c'est une quantité que nous pouvons mesurer régulièrement par des prises sanguines.

1. Écrire le modèle $(M)$ sous la forme : $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y(x) = h(x) \end{cases}$
2. En utilisant le degré relatif, donner la forme de Fliess du système.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

# Correction du rattrapage -Master Biomathématiques-

## Contrôle des Systèmes (M1)

**Exercice 1**

On considère le système linéaire contrôlé donné par ses éléments structurels suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le système donné n'est pas contrôlable.

   La matrice de contrôlabilité de Kalman associée au système considéré est :

   $$\varphi = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1point)$$

   Puisque $rg\varphi = 2 < 3$, alors le système n'est pas contrôlable, nous pouvons aussi conclure que le sous-système contrôlable est de dimension 2. $(1point)$

2. Donner une décomposition du système en sous-système contrôlable et sous-système non contrôlable.

   La matrice de passage qui permet la décomposition du système en sous-système contrôlable et non contrôlable est formée par deux colonnes linéairement indépendantes de $\varphi$, complétées par une colonne de la base canonique de sorte à former une matrice inversible, (théorème de la base incomplète).

   Par exemple :$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.(1point)$

   Alors,

   $$\begin{aligned} A^* &= TAT^{-1}, \quad B^* = TB, \quad \overline{x} = Tx.(1point) \\ A^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (1point) \\ B^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.(1point) \end{aligned}$$

   Le sous-système contrôlable est donné par la paire : $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   i.e.:

   $$\dot{\overline{x}}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}_{(2,1)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

   **Vérification**: $\varphi_1 = (B_1, A_{11}B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, rg\varphi_1 = 2.$

   Le sous système non contrôlable est donné par l'équation scalaire restante:

   $$\dot{\overline{x_3}} = -\overline{x_3}$$

3. Donner le retour d'état linéaire qui stabilise le sous-système contrôlable, en plaçant ses pôles en $(-1)$.

   On remarque d'abord que les valeurs propres de la matrice $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont $-i, i$ c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux à partie réelle nulle. Chacune d'entre elles est de multiplicité égale à 1, ce qui fait que l'origine est stable mais pas attractive. Nous n'avons donc pas la stabilité asymptotique.

   Maintenant, puisque la paire $(A_{11}, B_1)$ est contrôlable, il existe une matrice gain $K = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \end{pmatrix}$ telle que la matrice $(A_{11} + B_1K)$ soit asymptotiquement stable.

   Nous pouvons aussi placer les pôles de cette matrice en $(-1)$.

$$\begin{aligned} (A_{11} + B_1K) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det_{(A_{11}+B_1K)}(\lambda) &= \lambda^2 - k_2\lambda - (k_1 - 1)\,.(1point) \end{aligned}$$

   Pour placer les pôles en $-1$, on doit avoir: $\lambda^2 - k_2\lambda - (k_1 - 1) = (\lambda + 1)^2.(1point)$

   Ce qui donne, par identification:

$$\begin{cases} -k_2 = 2 \\ -(k_1 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = -2 \\ k_1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow K = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} (1point)$$

   Le contrôle stabilisant et plaçant les pôles en $(-1)$ est donc donné par :

$$u(x) = Kx = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.(1point)$$

4. Que pouvez-vous conclure maintenant sur la stabilité asymptotique du nouveau système complet?

   On a $(A_{11} + B_1K) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Le sous système d'ordre $(2 \times 2)$ a été stabilisé asymptotiquement par retour d'état statique et ses pôles sont palcés en $(-1)$ :

$$\dot{\overline{x}}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}_{(2,1)}$$

   Ensuite, la $3^{ème}$ composante du système est donnée par :

$$\dot{\overline{x_3}} = -\overline{x_3}$$

   Elle se comporte en $e^{-t}$, elle est donc asymtotiquement stable.

   Le système à tois composantes avec le retour d'état statique $u(x)$ donné plus haut s'écrit alors :

$$\dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}$$

   On conclut par observation que la matrice d'ordre $(3 \times 3)$ correspondante au système ci-dessus n'admet que $(-1)$ comme valeur propre. Il est donc asymptotiquement stable.$(1point)$.

5. Le système augmenté par la sortie qui observe la deuxième composante de l'état est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu \\ y(t) = x_1(t) = Cx(t) \end{array} \right.$$

Où $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice d'observabilité de Kalman est donnée par:

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ rg(\theta) &= 3, \end{aligned}$$

Donc le système est observable.$(1 point)$.

**Exercice 2**

$(T > 0)$ .On considère un modèle d'évolution de la maladie du SIDA in vivo contrôlé-observé, donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = S(t)\left(1 - S(t)\right)\left(1 + u_1\right) - S(t)V(t) \\ \dot{I}(t) = -I(t) + S(t)V(t) \\ \dot{V}(t) = -V(t) + I(t) \\ y(t) = V(t) \end{array} \right. \tag{M}$$

Sur le domaine d'état : $\Omega = \{x = (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 / \ \ 0 < S < 1, \ \ , \ \ V > 0\}$ et $u \in \mathbb{R}$.

1. Écrire le modèle $(M)$ sous la forme : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y(x) = h(x) \end{array} \right.$

$$f(x) = \begin{pmatrix} S(1 - S) - SV \\ -I + SV \\ I - V \end{pmatrix}; g(x) = \begin{pmatrix} S(1 - S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; h(x) = V.(0.5 point).$$

En utilisant le degré relatif, donner la forme de Fliess du système

On a:

$$L_g h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1 - S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0(0.5 point).$$

Puis

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1 - S) - SV \\ -I + SV \\ I - V \end{pmatrix} \\ &= I - V(0.5 point). \end{aligned}$$

Et

$$L_g\left(L_f h(x)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\left(1-S\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0(0.5point).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} L_f^2 h(x) &= L_f\left(L_f h(x)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\left(1-S\right) - SV \\ -I + SV \\ I - V \end{pmatrix} \\ &= -2I + V + SV(0.5point). \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} L_g\left(L^2{}_f h(x)\right) &= \begin{pmatrix} V & -2 & S+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\left(1-S\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= VS\left(1-S\right) \\ &\neq 0 \text{ sur } \Omega.(0.5point). \end{aligned}$$

Finalement, on a:

$$\begin{cases} L_g h(x) = 0 \\ L_g\left(L_f h(x)\right) = 0 \\ L_g\left(L^2{}_f h(x)\right) = VS\left(1-S\right) \neq 0, \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Ce qui veut dire que le degré relatif est $r = 3$. Le système est alors complètement linéarisable, $(1,5point)$.en considérant le changement de variables :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L^2{}_f h(x) \end{pmatrix} (1point). \tag{3}$$

Et le contrôle:

$$u_1(x(t)) = \frac{v(t) - L_f^3\left(h(x)\right)}{L_{g_1}\left(L^2{}_f h(x)\right)}(1point). \tag{4}$$

Où $v(t)$ est le nouveau contrôle. Donc,

$$\begin{pmatrix} \dot{Z_1} \\ \dot{Z_2} \\ \dot{Z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ v \end{pmatrix} (0.5point).$$

On trouve alors la forme canonique linéaire et contrôlable de Fliess:

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)(1point).$$