Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Module: Systèmes Dynamiques, M1biomaths, durée 1h30.

Exercice1: **05 pts** Soit le système

$$\left\{\begin{array}{c} x' = -xy^2 \\ y' = 3yx^2 \end{array}\right.$$

montrer que $(0,0)$ est stable.

Solution: Soit la fonction de Lyapounov

$$V(x,y) = x^2 + ay^2$$

alors

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = xx' + ayy' = (3a-1)\, x^2y^2$$

Exercice 2: 10 pts Trouver la matrice fondamentale de

$$\left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right.$$

avec

$$h(t) = \frac{\cos t - \sin t}{2 + \sin t + \cos t}$$

Solution:
Par sépartion des variables, on obtient (2 pts)

$$y(t) = \frac{(2 + \sin t + \cos t)}{3} y_0$$

ainsi

$$x' = x + \frac{(2 + \sin t + \cos t)}{3} y_0$$

et (03 pts)

$$x(t) = e^t x_0 + e^t y_0 \int_0^t \frac{(2 + \sin\tau + \cos\tau)}{3} e^{-\tau} d\tau$$

Ainsi la matrice fondamentale est (05 pts)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t \int_0^t \frac{(2+\sin\tau+\cos\tau)}{3} e^{-\tau} d\tau \\ 0 & \frac{(2+\sin t+\cos t)}{3} \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = e^{2\pi}$$

Exercice 3: 05 pts Résoudre

$$x' = Ax$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

solution:

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$, and $\lambda_2 = -3$. Les vecteurs propres associés sont $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ainsi la solution est

$$x(t) = c_1 e^{2t} e^1 + c_2 e^{-3t} e^2$$