Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2023/2024*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques

Final : **Méthodes de Réduction** I,
Master Biomathématiques et Modélisation
14 *janvier 2024* [1h30]

Exercice I [4 pts]

Soit (S_ε) un système régulièrement perturbé par le petit paramètre $\varepsilon > 0$. Soit (S_0) son équation réduite. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

A) Si (S_0) a la propriété d'existence et d'unicité pour toute condition initiale fixée, alors c'est aussi le cas de (S_ε).

B) Supposons que la solution de (S_ε) est unique pour toute condition c_ε. Si la solution de (S_0) de condition c_0 est globale, alors la solution de (S_ε) l'est aussi.

Exercice II [9 pts]

Soit le modèle biologique, appelé modèle de prédation 'donor control' et dans lequel la proie de densité x se développe nettement plus vite que le prédateur de densité y,

$$(S_\varepsilon)\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = rx(1-x) - (c+\varepsilon)x, \; x(0) = x_0 > 0 \\ \dot{y} = ecx - dy \; y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon << 1,$$

avec $(x,y) \in \mathrm{R}_+^2$ et r, c, e et d des paramètres strictement positifs.

1. Montrer que le modèle (S_ε) admet au plus deux composantes **N** et **M** isolées de la variétés lente et étudier leur attractivité.
2. Etudier l'applicabilté du Théorème de Tikhonov pour les systèmes lents rapides sur un intervalle de temps borné dans tous les cas. Calculer la solution lente.
3. Supposons que $r > c$. Soit $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))$ la solution de (S_ε). Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to0,\, t\to+\infty} (x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon)) = (x^*,y^*),$$

où $(x^*,y^*) \in \mathrm{R}_+^{*2}$ est à déterminer.

Dessiner, dans ce cas, une trajectoire approximative dans le plan des phases.

4. Est-ce que la limite précédente signifie que (x^*,y^*) est un point d'équilibre GAS du système singulièrement perturbé de (S_ε)? Justifier.

Exercice III [7 pts]

Considérons le problème de Cauchy non autonome singulièrement perturbé

$$(\Pi_\varepsilon)\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(t) - \varepsilon ty - x, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = x - \varepsilon e^{f(t)}, & y(0) = y_0, \end{cases}$$

où f est définie sur un intrvalle $[0,T]$.

Expliquer comment vous pouvez appliquer à (Π_ε) le théorème de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides sur un intervalle de temps borné.

Appliquer alors le théorème et donner explicitement l'approximation de la phase lente pour $f(t) := \dfrac{e^{\arcsin t}}{\sqrt{1-t^2}}$ et $y_0 = \pi/4$.

«Priver les gens de leurs droits fondamentaux revient à contester leur humanité même.» Nelson Mandela.

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. 2023/2024

Corrigé de l'épreuve finale de Méthodes de Réduction I du 14/01/2024.

Exercice I : [4 pts]

A) Faux. Exemple (S_ε) : $\dot{x} = \varepsilon |x|^{2/3}$, $x(0)=0$ (2)

admet une infinité de solutions mais (S_0) : $\dot{x} = 0$, $x(0)=0$ n'en admet qu'une seule !

B) Faux. Exemple (S_ε) : $\dot{x} = (x+\varepsilon)^2$, $x(0)=0$, $\varepsilon>0$

qui a pour unique solution $x(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon t} - \varepsilon$, définie pour $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}[$ (ou $t \in]-\infty, \frac{1}{\varepsilon}[$) (2)

alors que (S_0) : $\dot{x} = x^2$, $x(0)=0$, a pour solution $x(t) \equiv 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exercice II [9 pts]

1) Équation rapide, $\boxed{(ER) : x' = rx(1-x) - cx}$, y paramètre (0,25)

$\left[(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}\right]$ $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$

- Ni le problème perturbé, ni les équations de comparaisons n'ont un problème de non unicité. (0,25)

Variété lente : $rx(1-x) - cx = 0 \iff \boxed{x = 0}$ (M_0) (0,5)

ou $\boxed{x = \frac{r-c}{r}}$ (M) (0,5)

(M) existe si $r \geq c$ [c.à.d dans le quadrant positif $x\geq 0, y \geq 0$] (0,25)

Comme N et M sont deux droites confondues ou distinctes verticales, elles sont isolées. 0,25

Soit $f(x) := rx(1-x) - Cx$.

Attractivité de la variété lente:

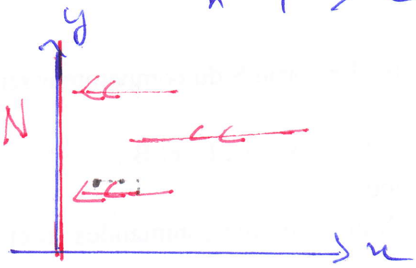
$$f'(x) = r - 2rx - C$$

d'où $f'(0) = r - C$, c.à.d que N est attractive (unif. / y) 0,5

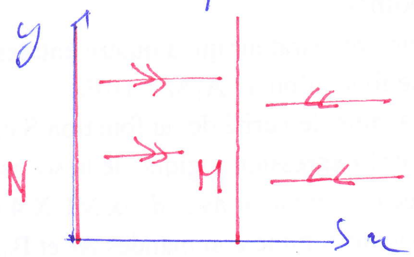
ssi $r < C$ (auquel cas M n'existe pas) (Voir pourquoi)

et $f'\left(\frac{r-C}{r}\right) = -r + C$, c.à.d que M est attractive 0,5

si $r > C$, donc dès que M existe.



$r \leq C$



$r > C$

2) Applicabilité du théorème de Tikhonov:

2.1 Cas où $r \leq C$, i.e N est l'unique variété lente et elle est attractive.

(E.L) $\dot{y} = -dy$, $y \in]\alpha, \beta[$, $\alpha < \beta$ 0,25

Équation lente

(E.C.L) $x' = rx(1-x) - Cx$, $x(0) = x_0 > 0$ 0,25

(Éq. de la couche limite)

[ou $\begin{cases} x' = -rx^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$ si $r = C$] Bon 0,5

de solution $\tilde{x}(\tau)$ définie pour tout $\tau \geq 0$

(P.R) $\dot{y} = -dy$, $y(0) = y_0 \in]\alpha, \beta[$ 0,25

(Problème réduit)

de solution évidente $\bar{y}(t) = e^{-dt}$, $t \geq 0$. (0,25)

2.2 Cas où $r > c$, i.e. M est la variété attractive.

(E.L) — $\dot{y} = ec\left(\frac{r-c}{r}\right) - dy$, $y \in]\alpha, \beta[$, $0 < \alpha < \beta$. (0,25)

(E.C.L) est la même que le cas $r < c$, de sol. $\tilde{u}(\tau)$, $\tau \geq 0$

(PR) $\dot{y} = ec\left(\frac{r-c}{r}\right) - dy$, $y(0) = y_0 > 0$ ($y_0 \in]\alpha, \beta[$). (0,25)

de solution $\bar{y}(t)$, $t \geq 0$ (équation linéaire).

Soit $T > 0$ fixé. D'après le théorème de Tikhonov, $\exists \varepsilon^* > 0 : \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon^* \Rightarrow$ la solution $(u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ de (S_ε) ~~dans~~ est définie au moins sur $[0, T]$ (1)

et vérifie :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(\varepsilon\tau, \varepsilon) = \tilde{u}(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq c \quad \forall t \in]0, T] \\ \frac{r-c}{r} & \text{si } r > c \quad \forall t \in]0, T] \end{cases}$$

Dans le cas où $r > c$, $\bar{y}(\cdot)$ se calcule aisément, par exemple en multipliant ~~les~~ deux membres de l'équation lente par le facteur intégrant e^{dt}.

On trouve la solution générale : $y(t) = \frac{a}{d} + Ke^{-dt}$ où $a = ec\left(\frac{r-c}{r}\right)$. En tenant compte de la condition initiale $y(0) = y_0$, on obtient

$$\bar{y}(t) = \frac{ec(r-c)}{rd} + \left(y_0 - \frac{ec(r-c)}{r}\right)e^{-dt}$$ (1)

3) $r > c$. Dans ce cas (M) est la variété attractive. Il suffit, pour calculer la limite demandée, de vérifier l'applicabilité du théorème de Tikhonov étendu aux intervalles de temps non bornés.

Equilibres de (E.L) : un seul équilibre ~~(x^*, y^*)~~ ~~avec x^*~~ $0 < y^* = \frac{ec}{d}\left(\frac{r-c}{r}\right)$ $\quad 0 \longrightarrow y^* \longleftarrow y$ 0,5

globalement asymptotiquement stable. [étude du signe de $\dot{y}$ ou dérivation du second membre].

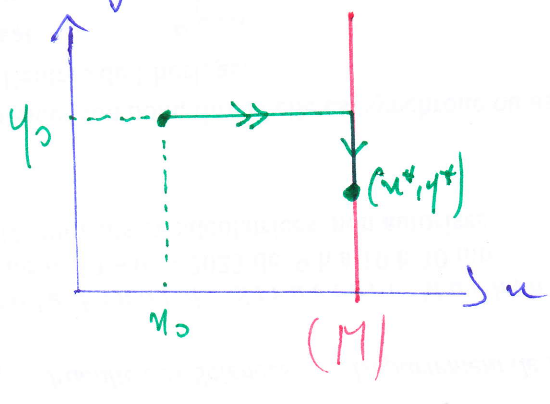
Comme y_0 est dans son bassin d'attraction, on peut affirmer que, pour ε assez petit, la solution $t \longmapsto (x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ de (S_ε) est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie, en particulier, que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) = \left(\frac{r-c}{r}, \bar{y}(t)\right) \quad \forall t > 0$$ 0,5

$$= \left(\frac{r-c}{r}, \frac{ec(r-c)}{rd} - \left(y_0 - \frac{ec(r-c)}{r}\right) e^{-dt}\right) \quad \forall t > 0$$

En passant à la limite qd $t \to +\infty$, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ t \to +\infty}} (x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) = \left(\frac{r-c}{r}, \frac{ec(r-c)}{r.d}\right) = (x^*, y^*).$$ 0,5



0,5

4) Non. D'ailleurs le seul équilibre intérieur de (S_ε) est :
$$\left(\frac{r-c-\varepsilon}{r}, \frac{ec(r-c-\varepsilon)}{rd}\right) \neq (x^*, y^*) \quad \forall \varepsilon > 0 \,!$$
0,5

Exercice III : [7 pts]

- On revient à un système autonome singulièrement perturbé en augmentant (Π_ε) comme suit :

$$(\overline{\Pi}_\varepsilon) \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(t) - \varepsilon t y - x & , \; x(0) = x_0 \\ \dot{y} = x - \varepsilon e^{f(t)} & , \; y(0) = y_0 \\ \dot{t} = 1 & , \; t(0) = 0 \end{cases}$$
0,50

En supposant que f est continue dans $[0,T]$, on peut appliquer le th. de Tikhonov à $(\overline{\Pi}_\varepsilon)$, les variables lentes étant y et t, $t \in [0,T]$. 0,50

- Application :

→ (E.R) : $x' = f(t) - x$ // y, t paramètres, $(') = \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ 0,50

→ On fait l'hypothèse que cette équation a la propriété d'existence et d'unicité pour toute C.I fixée. (*)

→ Variété lente : $x' = 0 \iff x = f(t) =: h(t,y)$ // $t \in [0,T]$, $y \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. 0,5

→ Attractivité : $\frac{\partial}{\partial x}(f(t) - x) = -1 < 0 \quad \forall (t,y)$. 0,5

Donc l'équilibre $f(t)$ de (E R) est A.stable unift par rapport à $(t,y) \in [0,T] \times [\alpha, \beta]$.

→ Bien sûr la variété lente est isolée (unique). 0,25

(*) c'est le cas pour notre choix de f.

→ (E.L). $\begin{cases} \dot y = f(t) = \dfrac{e^{\mathrm{Arcsin}\,t}}{\sqrt{1-t^2}} \\ \dot t = 1 \end{cases}$ $\quad t \in [0,T]$, $y \in]\alpha,\beta[$. 0,5

Notons que $0<T<1$.

Cette équation a aussi la propriété d'unicité pour toute condition initiale préalablement fixée. Bonus 0,5

→ On suppose que $y_0 \in]\alpha,\beta[$. x_0 est forcément dans le bassin d'attraction de $f(0)=1$ → $h(0,y_0)$ 0,25

ECL : $x' = \dfrac{e^{\mathrm{Arcsin}\,0}}{\sqrt{1-0^2}} - x = 1 - x$, $x(0) = x_0$ 0,5

de solution $\tau \mapsto \tilde{x}(\tau)$ (facilement calculable mais non demandée)

PR : $\begin{cases} \dot y = \dfrac{e^{\mathrm{Arcsin}\,t}}{\sqrt{1-t^2}} & y(0) = y_0 \\ \dot t = 1, & t(0) = 0 \end{cases}$ 0,75

que l'on peut assimiler juste à la première équation.

Soit $t \mapsto \bar{y}(t)$ la sol. de (PR).

D'après le th. de Tikhonov, pour ε assez petit, la solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ de (Π_ε) est définie sur $[0,T]$ et vérifie :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \tilde{x}(\tau) \quad \forall \tau \geq 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t) \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = f(t) = \frac{e^{\mathrm{Arcsin}\,t}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \forall t \in]0,T]$$ 1

Calcul de $t \mapsto \bar{y}(t)$:

$$\dot y = f(t) \iff y(t) - y_0 = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t \frac{e^{\mathrm{Arcsin}\,s}}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \left[e^{\mathrm{Arcsin}\,s}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow (\ast)\quad y(t) = e^{\mathrm{Arcsin}\,t} - 1 + y_0 \qquad t \in [0,T]$$ 1,5

FIN