Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année Master (2023/2024).
Faculté des Sciences Durée 1h30′, le 14/01/2024.

Examen Final -Master Biomathématiques-
Contrôle des Systèmes

Exercice 1 (12 Points)

On considère le système linéaire contrôlé suivant:

$$(S)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3 + u_1 + u_2\\ \dot{x}_2 = x_1\\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 - u_1\end{cases}.$$

Pour tout $(t \in [0,T])\,, T > 0$ avec un état $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et un contrôle $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. Étudier la contrôlabilité du système dans le cas où $u_1 \equiv 0$ puis dans le cas où $u_2 \equiv 0$.
2. S'il fallait supprimer un des deux contrôles suite à un problème technique, quel choix feriez-vous?
3. On suppose que l'autre choix est fait. Décomposer le système résultant de ce choix en sous-système contrôlable et sous-système non contrôlable.
4. Stabiliser le sous-système contrôlable en plaçant ses pôles en (-1).
5. Que pouvons-nous conclure sur la stabilisation du système complet (i.e. d'ordre 3)?
6. On considère maintenant une sortie associée au système (S) pour observer la première composante de l'état.

   Écrire le système augmenté par cette observation puis étudier son observabilité.

Exercice 2 (08 points)

On considère le système suivant:

$$(M)\begin{cases}\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ {x_1}^2 + x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2+2x_3 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} u\\ y = x_4\end{cases} \tag{M}$$

Sur le domaine : $D = \{x \in \mathbb{R}^4 / \ \ x_3 \neq -1\}$.

1. Trouver le degré relatif associé au système (M).
2. (M) est-il complètement linéarisable?
3. Préciser le changement de variables à effectuer.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année Master (2023/2024).
Faculté des Sciences Durée 1h:30$'$, le14/01/2024.

Correction de l'Examen Final, Master Biomathématiques, Contrôle des Systèmes

Exercice 1

Le système (S) donné s'écrit sous la forme : $\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1 + B_2u_2(t)$ où:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.(1point)$$

1. En supprimant le premier contrôle, on obtient la matrice de Kalman associée à ce premier cas :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (B_2, AB_2, A^2B_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ rg\,(\varphi_1) &= 3(1point) \end{aligned}$$

Le système sans le premier contrôle est donc contrôlable.

En supprimant le deuxième contrôle, on obtient la matrice de Kalman associée à ce deuxième cas :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (B_1, AB_1, A^2B_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ rg\,(\varphi_2) &= 2(1point) \end{aligned}$$

Le système sans le deuxième contrôle est non contrôlable.

2. En cas de problème technique il vaut mieux supprimer le premier contrôle pour garder une contrôlabilité totale sur le système.$(1point)$

3. L'autre choix est fait, donc le contrôle u_2 est supprimé, on obtient le système : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_1$

Où : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas contrôlable, nous voulons le décomposer en sous-système contrôlable et sous-système non contrôlable.

Pour former la matrice de passage T, nous choisissons les deux premières colonnes linéairement indépendantes de φ_2, que nous complétons par une colonne appropriée de la base canonique, de façon à former une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1point)$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1point)$$

$$\begin{aligned} \overline{A} &= T^{-1}AT \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} (1point) \end{aligned}$$

$$\overline{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} (1point)$$

Avec:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; A_{22} = (-1); B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Vérification:

On a : $A_{11}B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ donc $\hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, rg(\hat{\varphi}_1) = 2.$

$\Rightarrow$ Le sous-système de dimension 2 défini par la paire (A_{11}, B_1) est bien contrôlable.

Le système décomposé est donné par:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad \text{(Partie contrôlable).} \\ \left(\dot{\overline{x}}_3 \right) = (-1) (\overline{x}_3) \quad \text{(Partie non contrôlable).} \end{cases}$$

4. Pour simplifier les notations, on pose maintenant : $x = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}$.

   Afin de stabiliser le sous-système contrôlable, on considère un retour d'état linéaire : $u = Kx$ comme suit:

   $\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + B_1u_1(t) = (A_{11} + B_1K)\,x(t)$

$$\begin{aligned} (A_{11} + B_1K) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det_{(A_{11}+B_1K)}(\lambda) &= \lambda^2 - k_2\lambda + (1 - k_1)\,(1point) \end{aligned}$$

   Pour placer les pôles en (-1), il faut que : $\det_{(A_{11}+B_1K)}(\lambda) = \left(\lambda^2 + 1\right)$.

   Par identification, on trouve:

$$\begin{cases} -k_2 = 2 \\ (1 - k_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_2 = -2 \\ k_1 = 0 \end{matrix} \; (0.5point)$$

   Donc : $K = (-2, 0)$ et $u = (-2, 0) \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}$.

5. Puisque le mode propre non contrôlable est asymptotiquement stable, (il est donné par l'équation $\dot{\overline{x}}_3 = -\overline{x}_3$), alors, le système d'ordre 3 est stabilisable.$(1point)$

6. Le système augmenté par la sortie qui observe la première composante de l'état est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1 + B_2 u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.(0.5point)$

La matrice d'observabilité de Kalman est donnée par:

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ rg(\theta) &= 3, \end{aligned}$$

Donc le système est observable.$(1point)$

Exercice 3 (06 points)

On considère le système suivant:

$$(M) \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ {x_1}^2 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = x_4 \end{cases} \tag{M}$$

Sur le domaine : $D = \{x \in \mathbb{R}^4 / \ \ x_3 \neq -1\}$.

1. Trouver le degré relatif associé au système (M).

Le modèle (M) est sous la forme : $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y(x) = h(x) \end{cases}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ {x_1}^2 + x_2 \end{pmatrix}; g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; h(x) = x_4.(0.5point)$$

On a:

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0.(0.5point) \end{aligned}$$

Puis

$$
\begin{aligned}
L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ {x_1}^2 + x_2 \end{pmatrix} \\
&= {x_1}^2 + x_2 . (0.5 point)
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
L_g \left(L_f h(x) \right) &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 + 2x_3 \\
&\neq 0 \text{ sur } D . (0.5 point)
\end{aligned}
$$

Finalement, on a:

$$
\begin{cases} L_g h(x) = 0 \\ L_g \left(L_f h(x) \right) = 0, \forall x \in D \end{cases}
$$

Ce qui veut dire que le degré relatif est $r = 2$. $(1 point)$

2. Le système n'est pas complètement linéarisable, il est seulement partiellement linéarisable. $(1 point)$
3. On considère le changement de variables :

$$
Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ q_3(x) \\ q_4(x) \end{pmatrix} (0.5 point) \tag{3}
$$

Où $q_3(x)$ et $q_4(x)$ sont choisies de sorte que $Z = \Phi(x)$ soit un difféomorphisme.
Donc :

$$
Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ {x_1}^2 + x_2 \\ q_3(x) \\ q_4(x) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
D\Phi(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (0.5 point) \\
\det D\Phi(x) &= 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

Les deux dernières lignes de $D\Phi(x)$ sont choisies de la base canonique.
Ce qui fait que $\begin{pmatrix} q_3(x) \\ q_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ {x_1}^2 + x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On a , $\begin{cases} x_4 = Z_1 \\ x_1 = Z_3 \\ x_3 = Z_4 \end{cases}$ donc $Z_2 = Z_3^2 + x_2 \Rightarrow x_2 = Z_2 - Z_3^2.$

Puis : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2 - x_1^3 \Rightarrow \dot{Z}_3 = \dot{x}_1 = Z_3(Z_2 - Z_3^2) - Z_3^3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + u \Rightarrow \dot{Z}_4 = \dot{x}_3 = -Z_4 + u \end{cases}$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 - Z_3^2 \\ Z_4 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ b(Z) + a(Z)u \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{pmatrix} (0.5point)$$

Et comme :

$$L_f^2h(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ {x_1}^2 + x_2 \end{pmatrix} = 2x_1(x_1x_2 - x_1^3) + x_1.$$

$$\Rightarrow b(x) = L_f^2h(x) = 2x_1(x_1x_2 - x_1^3) + x_1 \Rightarrow b(Z) = 2Z_3^2(Z_2 - 2Z_3^2) + Z_3.(0.5point)$$

$$\text{et } a(x) = L_g\left(L_fh(x)\right) = 2 + 2x_3 \Rightarrow a(Z) = 2 + 2Z_4 \left(\neq 0\right). (0.5point)$$

Et le contrôle:

$$\begin{aligned} u(Z(t)) &= \frac{v(t) - b(Z)}{a(Z)} && (4) \\ &= \frac{v(t) - [2Z_3^2(Z_2 - 2Z_3^2) + Z_3]}{2 + 2Z_4}(1point) && (5) \end{aligned}$$

Où $v(t)$ est le nouveau contrôle.

Le système partiellement linéarisé s'écrit alors dans les nouvelles coordonnées:

$$\begin{pmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ v \\ Z_3(Z_2 - Z_3^2) - Z_3^3 \\ -Z_4 + \dfrac{v(t) - 2Z_3^2(Z_2 - 2Z_3^2) + Z_3}{2 + 2Z_4} \end{pmatrix} (0.5point)$$

Ou alors :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} Z_2 \\ v \\ Z_3(Z_2 - Z_3^2) - Z_3^3 \\ \left[-Z_4 - \left(\dfrac{2Z_3^2(Z_2 - 2Z_3^2) + Z_3}{2 + 2Z_4}\right)\right] + \dfrac{1}{2 + 2Z_4} v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Z_2 \\ 0 \\ Z_3(Z_2 - Z_3^2) - Z_3^3 \\ \left[-Z_4 - \left(\dfrac{2Z_3^2(Z_2 - 2Z_3^2) + Z_3}{2 + 2Z_4}\right)\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2 + 2Z_4} \end{pmatrix} v
\end{aligned}
$$