

Département de Mathématiques
 Faculté des Sciences
 Université de Tlemcen
 Module: Systèmes Dynamiques et Applications

Contrôle continu, Novembre 2023.

Exercice 1: 08 pts Soit $A \in M_{2 \times 2}$ une matrice, soit le système

$$x' = Ax$$

Supposons que A une valeur propre simple λ avec un vecteur propre $(1, m)$, $m \in \mathbb{R}$. Montrer que $y = mx$ est positivement invariant.

Solution:

Soit

$$S = \{(x, y) : G(x, y) = mx - y = 0\}$$

Remarquons que

$$G(x, y) = 0$$

veut dire **03 pts**

$$G(x, y) = (m, -1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi on a **03 pts**

$$\frac{dG}{dt} = (m, -1) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (m, -1) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (m, -1) \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = x(m, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

ceci montre que S est positivement invariant. **02 pts**

Exercice2. 12 pts Soit le système

$$(2) \quad x'(t) = A(t)x, x \in \mathbb{R}^2$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

1) **03 pts** Pour chaque t fixé, calculer les valeurs propres.

2) **03 pts** Montrer que

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t)e^{\frac{t}{2}} \\ \sin(t)e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

est une solution de (2).

3) **03 pts** Calculer $\|y(t)\|^2$, où $\|(a, b)\|^2 = a^2 + b^2$.

4) **03 pts** Le point d'équilibre $x = 0$ est-il stable ? Conclure.

Solution: un calcul simple montre que

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

ainsi, si la stabilité par linéarisation est vraie, le point $(0, 0)$ est asym. stable.

2) simple vérification montre que

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t)e^{\frac{t}{2}} \\ \sin(t)e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

est une solution de (2).

3) On a

$$\|y(t)\|^2 = [-\cos(t)e^{\frac{t}{2}}]^2 + [\sin(t)e^{\frac{t}{2}}]^2 = e^t \rightarrow +\infty$$

4) On remarque d'après (3) que la solution n'est pas stable. Ainsi, les valeurs propres dans le cas non autonome ne prédisent rien.