Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2023/2024)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L3)
Examen de rattrapage: Introduction aux processus aléatoires (1h30mn)
09/06/2024

EXERCICE N°1 (10 pts)

Les questions sont indépendantes les unes des autres

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r définies sur l'espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i.i.d de meme loi μ. On pose $Y_n = \min(X_1, ..., X_n)$

   a). On suppose que μ.est la loi uniforme sur [0;1], donner sa densité et sa fonction de répartition (1pt)

   b). Montrer que la suite $(nY_n)_{n\geq 1}$converge en loi vers une limite qu'on explicitera.$[indication : \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}]$ $(2.5pts)$

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. positives admettant un moment d'ordre 1. E(X)=m<∞ . On pose $Z_n = \frac{X_n}{n^2}$

   La suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ? dans L1 ? En probabilité ? Si oui, vers quelle limite ? (2.5pts)

3. Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de carré intégrable et satisfaisant

$$E(X/Y) = Y \quad p.s \qquad et \qquad E(Y/X) = X \quad p.s$$

   a) Montrez que $E(XY) = E(X^2) = E(Y^2)$ $(2pts)$

   b) En déduire la variance de X - Y puis l'égalité X = Y p.s. (2pts)

EXERCICE N°2 (10 pts)

On considére un échantillons de n v.a.r.i.i.d $(X_1, ..., X_n)$ de densité de paramètre λ, $\lambda > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \times x^{-\frac{1}{\lambda}-1} \times 1_{(x\geq 1)}$$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité. (1.5pts)

2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ (2.5pts)

3) On considére la variable aléatoire $Y_i = \ln X_i$ avec X_i qui suit une loi de densité $f(x)$ Calculer la fonction de répartion de Y et en déduire qu'elle est de loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$ $(2pts)$

4) En utilisant les résultats de la question précédente dites si l'estimateur obtenu est sans biais ? convergent ? (1.5pts)

5) Calculer l'information relative à λ contenue dans l'échantillon. (informaton de Fisher) (1.5pt)

6) En déduire si l'estimateur précédent est efficace ? (1pt)

Solution proposée

EXERCICE N°1 (10 pts)

Les questions sont indépendantes les unes des autres

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r définies sur l'espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i.i.d de meme loi μ. On pose $Y_n = \min(X_1, ..., X_n)$

   a). On suppose que μ.est la loi uniforme sur [0;1], donner sa densité et sa fonction de répartition (1pt)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad et \quad F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ x \in [0;1] \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

   b). Montrer que la suite $(nY_n)_{n\geq 1}$converge en loi vers une limite qu'on explicitera.$[indication : \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}]$ $(2.5pts)$

$$D_X = [0;1] \Longrightarrow D_{nY_n} = [0, n]$$

$$\begin{aligned} F_{nY_n}(y) &= P(nY_n < y) \\ &= P(Y_n < y/n) \\ &= 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) \geq y/n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq y/n) \quad indep \\ &= 1 - (1 - P(X_i < y/n))^n \quad meme\ loi \\ &= 1 - (1 - \frac{y}{n})^n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

   Or cette limite est la fonction de répartition de la loi exponetielle de paramètre 1 CQFD

5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. positives admettant un moment d'ordre 1. E(X)=m<∞ . On pose $Z_n = \frac{X_n}{n^2}$

   La suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ? dans L1 ? En probabilité ? Si oui, vers quelle limite ? (2.5pts)

   Soit $\varepsilon > 0$ l'inégalité de Markov implique

$$\sum_{n\geq 1} P(|Z_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{m}{n^2\varepsilon} < \infty$$

   donc Z_n converge presque sûrement vers 0

   $\Longrightarrow Z_n$ converge en probabilité vers 0

   De plus

$$E(|Z_n|) = E(\frac{X_n}{n^2}) = \frac{m}{n^2} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

   donc donc Z_n converge en L^1

6. Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de carré intégrable et satisfaisant

$$E(X/Y) = Y \quad p.s \qquad et \qquad E(Y/X) = X \quad p.s$$

   a) Montrez que $E(XY) = E(X^2) = E(Y^2)$ $(2pts)$

$$E(XY)) = E(E(XY/Y)) = E(YE(X/Y)) = E(Y^2) \ \ CQFD$$

   idem

$$E(XY)) = E(E(XY/X)) = E(XE(Y/X)) = E(X^2) \ \ CQFD$$

b) En déduire la variance de X - Y puis l'égalité X = Y p.s. (2pts)

$$E(X-Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) = 0$$

d'où X=Y presque sûrement par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, et

$$Var(X-Y) = E(X-Y)^2 - E^2(X-Y) = 0 \quad p.s$$

EXERCICE N◦2 (10 pts)

On considére un échantillons de n v.a.r.i.i.d $(X_1, ..., X_n)$ de densité de paramètre λ, $\lambda > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \times x^{-\frac{1}{\lambda}-1} \times 1_{(x \geq 1)}$$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité. (1.5pts)
Il est clair que $f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \times x^{-\frac{1}{\lambda}-1} \cdot dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{x^{-\frac{1}{\lambda}}}{-\frac{1}{\lambda}}\right]_1^{+\infty} \\ &= -[0-1] = 1 \quad CQFD\end{aligned}$$

2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ (2.5pts)
la vraisemblance

$$\begin{aligned}L(X,\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \times \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\frac{1}{\lambda}-1}\end{aligned}$$

le log-vraisemblance

$$\ln L(X,\lambda) = -n \ln \lambda + \left(-\frac{1}{\lambda} - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

l'estimateur

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(X,\lambda) = \frac{-n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(X,\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \frac{-n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\end{aligned}$$

L'estimateur du maximum deλ est

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

3) On considére la variable aléatoire $Y_i = \ln X_i$ avec X_i qui suit une loi de densité $f(x)$ Calculer la fonction de répartion de Y et en déduire qu'elle est de loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$ $(2pts)$

$$D_X = [1, +\infty[\Longrightarrow D_Y = [0, +\infty[$$

Si y$\geq$ 0

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) \\
&= P(X \leq e^y) \\
&= \int_{-\infty}^{e^y} f(x)dx \\
&= \int_1^{e^y} f(x)dx \\
&= \int_1^{e^y} \frac{1}{\lambda} \times x^{-\frac{1}{\lambda}-1} \cdot dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{x^{-\frac{1}{\lambda}}}{-\frac{1}{\lambda}} \right]_1^{e^y} \\
&= - \left[e^{-y/\lambda} - 1 \right] \\
&= 1 - e^{-y/\lambda}
\end{aligned}$$

Or ceci est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$ $CQFD$

4) En utilisant les résultats de la question précédente dites si l'estimateur obtenu est sans biais ? convergent ? (1.5pts)

L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc la moyenne empirique d'un échantillon de la loi exponentielle de paramétre $1/\lambda$.On a donc

$$E(\widehat{\lambda}) = E(\overline{Y_n}) = E(Y_1) = \lambda$$

donc notre estimateur est sans biais

Il est aussi convergent par la loi des grands nombres.

5) Calculer l'information relative à λ contenue dans l'échantillon. (informaton de Fisher) (1.5pt)

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(X, \lambda) \right) \\
&= E\left(\frac{-n}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \right) \\
&= E\left(\frac{-n}{\lambda^2} + \frac{2n}{\lambda^3} \overline{Y_n} \right) \\
&= \frac{-n}{\lambda^2} + \frac{2n}{\lambda^3} E(\overline{Y_n}) \\
&= \frac{-n}{\lambda^2} + \frac{2n}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

6) En déduire si l'estimateur précédent est efficace ? (1pt)

$$Var(\widehat{\lambda}) = Var(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n} Var(Y_1) = \frac{\lambda^2}{n} = I^{-1}(\lambda)$$

donc notre estimateur est efficace