Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2023/2024)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L3)
Examen du module introduction aux processus aléatoires (1h30mn)
21/05/2024

EXERCICE N°1 (10 pts)

- I] Soit X une variable qui suit la loi de gamma de paramètres (2,λ) et la loi conditionnelle de Ysachant X=x est une loi uniforme sur [0;x] ie

$$f_X(x) = \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} \cdot 1_{(x>0)} \quad et \quad f_{Y/X=x}(y) = \frac{1}{x} \cdot 1_{0<y<x}$$

1) Calculer E(Y/X) puis E(X/Y) (3pts)
2) En déduire E((X+XY)/Y) et E(E(Y/X)) (2pts)

- II] Soit (X,Y) un vecteur gaussien centré tel que E(X^2)=4, E(Y^2)=1, On suppose de plus que 2X+Y et X-3Y sont des v.a indépendantes.

1) Calculer la covariance Cov(2X + Y, X - 3Y) ? (0.5pts)
2) En déduire la covariance Cov(X, Y). (1.5pts)
3) Déterminer la matrice de variance-covariance de (X, Y) (0.5pt)
4) Le vecteur (X + Y, 2X - Y) est-il gaussien? si, oui déterminer sa matrice de variance-covariance (2.5pts)

EXERCICE N°2 (10 pts)

Les questions sont indépendantes les unes des autres:

- 1) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r.i.i.d de loi *E(1) loi exponetielle de paramètre 1.* On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

La suite $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge-t-elle presque surement ? En probabilité ? Si oui, vers quelle limite ? (2pts)

- 2) On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r.i.i.d de loi de Poisson de paramètre 1.On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n$

a) Quelle est la loi de S_n? Calculer $P(S_n \leq n)$ en fonction de n (1.5pts)
b) En utilisant le TCL théorème central limite, montrer que: (1.5pts)

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

- 3) Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\cdot 1_{]-1,1[}(x)$,puis en déduire la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-cosx)/\left(\pi x^2\right)$

  [Indication: cos(a)=$\frac{e^{-ia}+e^{ia}}{2}$] (5pts)

Solution proposée (2024)

EXERCICE N°1

I]

1) Calculer E(Y/X) puis E(X/Y) (3pts)

$$\begin{aligned} E(Y/X) &= \int_{\mathbb{R}} y \;\; f_{Y/X=x}(y) \cdot dy \\ &= \int_0^x \frac{y}{x} dy \\ &= \frac{1}{2x}\left[y^2\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}x \qquad\qquad (1pt) \end{aligned}$$

$$E(X/Y) = \int_{\mathbb{R}} x \;\; f_{X/Y=y}(x) \cdot dx \qquad (0.5pt)$$

Calculons $f_{X/Y=y}(x)$?

On sait que, la loi conjointe est:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_{Y/X=x}(y) \times f_X(x) \\ &= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot 1_{(x>y>0)} \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Loi marginale de Y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \cdot dx \\ &= \int_y^{+\infty} \lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot dx \\ &= \lambda\left[-e^{-\lambda x}\right]_y^{+\infty} \\ &= \lambda e^{-\lambda y} \qquad avec \;\; y > 0 \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Donc Y est une v.a.qui suit une loi exponetielle

On en conclu que $f_{X/Y=y}(x)$ est:

$$\begin{aligned} f_{X/Y=y}(x) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda x}}{\lambda e^{-\lambda y}} \\ &= \lambda e^{-\lambda(x-y)} \qquad avec\ x > y > 0 \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E(X/Y) &= \int_{\mathbb{R}} x \;\; f_{X/Y=y}(x) \cdot dx \\ &= \int_y^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(x-y)} \cdot dx \;\; par\ intégration\ par\ partie \\ &= \left[-x \cdot e^{-\lambda(x-y)}\right]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} e^{-\lambda(x-y)} \cdot dx \\ &= \left[0 + ye^0\right] + \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(x-y)}\right]_y^{+\infty} \\ &= \left(y + \frac{1}{\lambda}\right) \qquad (1pt) \end{aligned}$$

2) En déduire E((X+XY)/Y) et E(E(Y/X)) (2pts)

$$\begin{aligned}
E((X+XY)/Y) &= E(X/Y)\ + E(XY/Y)\\
&= \ E(X/Y)\ + yE(X/Y)\\
&= (1+y)\ E(X/Y)\\
&= (1+y)\left(y+\frac{1}{\lambda}\right) \quad (1pt)
\end{aligned}$$

$$E(E(Y/X)) = E(Y) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{car Y loi} \text{ exponetielle} \quad (1\text{pt})$$

ou bien

$$\begin{aligned}
E(E(Y/X)) &= E(\frac{1}{2}X)\\
&= \frac{1}{2}E(X)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{car X loi de gamma}
\end{aligned}$$

II]
1) 2X+Y et X-3Y sont des v.a indépendantes.$\Longrightarrow$ Cov(2X + Y, X - 3Y)=0 (0.5pt)
2)

$$\begin{aligned}
Cov(2X+Y, X-3Y) &= 2cov(X,X) - 6cov(X,Y) + cov(Y,X) - 3cov(Y,Y) \quad \textit{linéarité} \qquad (0.5pt)\\
&= 2V(X) - 5cov(X,Y) - 3V(Y)\\
&= 2E(X^2) - 5cov(X,Y) - 3E(Y^2) \qquad \textit{v.a.centrée} \qquad (0.5pt)\\
&= 5 - 5cov(X,Y)
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{aligned}
Cov(2X+Y, X-3Y) &= 0 \Longleftrightarrow 5 - 5cov(X,Y) = 0\\
&\Longleftrightarrow cov(X,Y) = 1 \quad (0.5pt)
\end{aligned}$$

3) la matrice de variance-covariance de (X, Y)

$$\Sigma_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} V(X) & cov(X,Y)\\ cov(X,Y) & V(Y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad (0.5pt)$$

4)
■Le vecteur (X + Y, 2X - Y) est gaussien; car il est une transformation linéaire du vecteur gaussien (X, Y). De plus, on remarque que:

$$\begin{pmatrix} X+Y\\ 2X-Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix} \qquad (1pt)$$

Il s'en suit que:

$$E\begin{pmatrix} X+Y\\ 2X-Y\end{pmatrix} = A\cdot E\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

et la matrice covariance est donnée par la formule $A\Sigma_{(X,Y)}A^t$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(X+Y,2X-Y)} &= A\Sigma_{(X,Y)}A^t \qquad (0.5pt)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 7 & 8\\ 8 & 13\end{pmatrix} \qquad (0.5pt)
\end{aligned}$$

EXERCICE N°2

1) Selon la LFGN (loi forte des grands nombres) on a que $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E(X_1)$ $p.s$ Donc, $Y_n \longrightarrow E(X_1^2)$ $p.s$ ainsi on a:

$$E(X_1^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = 2 \qquad \text{(intégration par partie)}$$

ou bien

$$E(X_1) = 1 \quad et \quad V(X_1) = 1 \Longrightarrow E(X_1^2) = V(X_1) + E^2(X_1) = 1 + 1^2 = 2$$

Conclusion

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 2 \quad p.s \Longrightarrow Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 2 \quad en\ proba$$

2)

a) Quelle est la loi de S_n? Calculer $P(S_n \leq n)$ en fonction de n

Rappelons le résultat du cours

$$\text{Si } X_1 \hookrightarrow Poisson(\lambda) \quad et \quad X_2 \hookrightarrow Poisson(\mu) \quad alors \quad X_1 + X_2 \hookrightarrow Poisson(\lambda + \mu)$$

Sinon, on démontre facilement, le fait que Si $X_1 \hookrightarrow Poisson(\lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow Poisson(\mu)$ $alors$ $X_1+X_2 \hookrightarrow Poisson(\lambda + \mu)$,En effet

$$\begin{aligned}
P(\ X_1 + X_2 &= n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k \cap X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = n-k) \quad indep \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \quad iid \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} \quad formule\ du\ binome\ de\ Newton \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \quad CQFD
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence sur n, on a:

$$S_n \hookrightarrow Poisson(n) \qquad car \quad X_i \hookrightarrow Poisson(1) \quad \forall i$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
P(S_n &\leq n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} \\
&= e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}
\end{aligned}$$

b) En utilisant le TCL théorème central limite, montrer que:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

D'après TCL, on sait que $\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} Z$ avec Z v.a.normale centrée réduite $Z \hookrightarrow N(0,1)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} P(S_n \leq n)\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} P(S_n - n \leq 0)\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \leq 0)\\
&= P(Z \leq 0) \quad TCL\\
&= F_Z(0)\\
&= \frac{1}{2} \quad CQFD
\end{aligned}$$

3) Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\cdot 1_{]-1,1[}(x)$,puis en déduire la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-cosx)/\left(\pi x^2\right)$

Si X v.a.r alors $\Phi_X(t) = E(e^{itX})$ est sa fonction caractéristique, donc:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1-|x|)\cdot 1_{]-1,1[}(x)\cdot e^{itx}dx\\
&= \int_{-1}^{0}(1+x)\cdot e^{itx}dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cdot e^{itx}dx\\
&= \int_{0}^{1}(1-x)\cdot e^{-itx}dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cdot e^{itx}dx\\
&= 2\int_{0}^{1}(1-x)\cdot\cos(tx)dx\\
&= 2\int_{0}^{1}\cos(tx)dx - 2\int_{0}^{1}x\cdot\cos(tx)dx\\
&= \frac{2}{t}\quad[\sin(tx)]_0^1 - 2\left[\frac{x}{t}\sin(tx)\right]_0^1 + \frac{2}{t}\int_0^1\sin(tx)dx \qquad\qquad si \quad t\neq 0\\
&= \frac{2}{t}[\sin t - \sin 0] - \frac{2}{t}[\sin t-\sin 0] + \frac{2}{t^2}\quad[-\cos(tx)]_0^1\\
&= \frac{2}{t^2}[\cos 0 - \cos t]\\
&= 2\frac{1-\cos t}{t^2}
\end{aligned}$$

Pour t=0, la premiére intégrale vaut 1

D'après le cours, En utilisant théorème d'inversion de la fonction caractèristique, on sait que (sous réserve de la continuité par rapport a la mesure ici Lebesgue), on a:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{itx}dx \Longleftrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\cdot e^{-itx}dx$$

On en d´eduit que pour presque tout x:

$$\begin{aligned}
(1-|x|)\cdot 1_{]-1,1[}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot e^{-itx}dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos t}{\pi t^2}\cdot e^{itx}dx
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction de densité $\frac{1-\cos x}{\pi x^2}$ a pour fonction de répartition $(1-|t|)\cdot 1_{]-1,1[}(t)$