Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

$3^{\text{ème}}$ année Licence Mathématiques
Semestre 6

Examen Final de Géométrie Différentielle
28 Mai 2024
Durée 1h 30mn

Questions de cours (5 pts)

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension n.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Quelles sont les sous variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0 ?

Exercice 1 (5 pts)

Soit p et q deux réels positifs. On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^3 + 3px = q\right\}$$

1. Pour quelles valeurs de p et q, M est une sous variété de $\mathbb{R}^2$? Donner sa dimension.
2. Déterminer le plan tangent à M au point $(0, \sqrt{q})$.

Exercice 2 (5 pts)

On considère le difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{aligned}\phi_t : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x, y) &\longmapsto \quad \phi_t(x, y) = \left(x\exp(-t), y\exp(t) + \frac{1}{3}x^2(\exp(t)) - \exp(-2t)\right)\end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ_t définit un groupe à un paramètre.
2. Déterminer le champ de vecteurs X associé au flot ϕ_t.

Exercice 3 (5 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (x^2 - 2y + 1, x)$$

1. Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme.
2. Déterminer f_*X lorsque

$$X_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2(x, y) = y^2\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X_3(x, y) = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - x + y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

3$^{\text{ème}}$ année Licence Mathématiques
Semestre 6

Corrigé de l'examen final de Géométrie Différentielle
28 Mai 2024

Question de cours (5 pts)

Voir le cours **(2pts+2pts+1pt)**

Exercice 1 (5 pts)

Soit $M = M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^3 + 3px = q\}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

1. On considère l'application

$$\begin{aligned} & g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y,z) \to \quad g(x,y) = y^2 - x^3 + 3px - q \end{aligned}$$

g est bien de classe C^∞ et on a

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0\}) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^3 + 3px - q = 0\right\} \\ &= M \cap \mathbb{R}^2 = M \quad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que g est une submersion en tout point. La matrice jacobienne est :

$$(J_g)(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 3p & 2y \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Supposons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(J_g)(x,y) = (0,0)$. Soit, donc, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} -3x^2 + 3p = 0 \\ 2y = 0 \\ y^2 - x^3 + 3px - q = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \pm\sqrt{p} \\ y = 0 \\ y^2 - x^3 + 3px - q = 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{(1pt)}$$

Si $x = \pm\sqrt{p}$ et $y = 0$, alors $4p^3 = q^2$. **(0.5pt)**
C'est-à-dire que les points $(\sqrt{p}, 0)$ et $(-\sqrt{p}, 0)$ n'appartiennent pas à M si $4p^3 \neq q^2$ **(0.5pt)**.
Ainsi, les valeurs de p et q pour lesquelles M est une sous variété de $\mathbb{R}^2$ sont données par l'ensemble $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 / 4p^3 = q^2\}$ **(0.5pt)**
Conclusion : $\forall (p,q) \in S$, g est une submersion, par la suite le sous ensemble M est, donc, une sous variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. **(0.5pt)**

2. *L'espace tangent à M au point $(0, \sqrt{q})$ est donné par :*

$$\begin{aligned} T_{(0,\sqrt{q})}M &= \ker(Dg(0,\sqrt{q})) \\ &= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / 3pu + 2\sqrt{q}v = 0\right\} \\ &= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / v = \left(\frac{-3p}{2\sqrt{q}}\right) u\right\} \\ &= Vect\left\{\left(1, \frac{-3p}{2\sqrt{q}}\right)\right\} \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

($q \neq 0$, car $(0,0) \in S$).

Exercice 2 (5 pts)

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \quad \phi_t(x, y) = (x \exp(-t), y \exp(t) + \frac{1}{3}x^2(\exp(t)) - \exp(-2t)) \end{aligned}$$

1. **a.** $\phi_0(x, y) = (x, y)$. **(0.5 pt)**
   b. $\phi_t(x, y) = (x \exp(-t), y \exp(t) + \frac{1}{3}x^2(\exp(t)) - \exp(-2t))$.

$$\begin{aligned} \phi_s \circ \phi_t(x, y) &= \phi_s(\phi_t(x, y)) \\ &= \phi_s((x \exp(-t), y \exp(t) + \frac{1}{3}x^2(\exp(t)) - \exp(-2t)) \\ &= (x \exp(-(s + t)), y \exp(s + t) + \frac{1}{3}x^2(\exp(s + t) - \exp -2(s + t)) \\ &= \phi_{s+t}(x, y) \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

   c. D'une part, on a

$$\phi_{-s}(x, y) = (x \exp(s), y \exp(-s) + \frac{1}{3}x^2(\exp(-s) - \exp(2s)) \qquad \textbf{(0.5 pt)}.$$

   D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \phi_s^{-1} \circ \phi_s(x, y) &= \phi_s^{-1}(\phi_s(x, y)) \\ &= \phi_s^{-1}(x \exp(-s), y \exp(s) + \frac{1}{3}x^2(\exp(s) - \exp(-2s)) \\ &= \phi_0(x, y) = (x, y) \end{aligned} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

   Si on pose $A = x \exp(-s)$ et $B = y \exp(s) + \frac{1}{3}x^2 (\exp(s) - \exp(-2s))$. Alors, on obtient

$$x = A \exp(s) \quad \text{et} \quad y = B \exp(-s) - \frac{1}{2}A^2(\exp(2s) - \exp(-s)) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

   D'où $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\phi_s^{-1}(x, y) = (x \exp(s), y \exp(-s) + \frac{1}{3}x^2 (\exp(-s) - \exp(2s)) = \phi_{-s}(x, y) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

   Il s'agit donc d'un groupe à un paramètre.

2. ϕ_t est le flot du champ de vecteurs X. Ce générateur est obtenu comme $X = \left.\frac{d\phi_t}{dt}\right|_{t=0}$. **(0.5pt)**
   Ce qui donne

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\phi_t}{dt}\right|_{t=0} &= \left.(-x \exp(-t), y \exp(t) + \frac{1}{3}x^2 (\exp(t) + 2 \exp(-2t))\right|_{t=0} \\ &= (-x, y + x^2) \end{aligned} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

   D'où

$$X = -x\frac{\partial}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial}{\partial y} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Exercice 3 (5 pts)

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \quad f(x,y) = (x^2 - 2y + 1, x)$$

1. *Montrons que f est un C^∞-difféomorphisme*

   f est de classe C^∞. Montrons que f est bijective :
   $$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \exists! (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (u,v)$$
   On a : $x = v$ et $y = \dfrac{1}{2}(v^2 - u + 1).$ **(1pt)**

   On en déduit
   $$\exists! (v, \frac{1}{2}(v^2 - u + 1)) \in \mathbb{R}^2 / f(v, \frac{1}{2}(v^2 - u + 1)) = (u,v)$$
   Par la suite f est bijective.

   L'application réciproque
   $$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
   $$(x,y) \longmapsto \quad f^{-1}(x,y) = (y, \frac{1}{2}(y^2 - x + 1))$$
   est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. **(0.5pt)**

   Conclusion : f est un difféomorphisme de classe C^∞. **(0.25pt)**

2. On a
   $$f_* X = (D_{f^{-1}(x,y)} f)(X(f^{-1}(x,y))) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$
   Or, la matrice jacobienne de f est
   $$(Jf)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.25pt)}$$
   D'où
   $$(Jf)(f^{-1}(x,y)) = \begin{pmatrix} 2y & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{0.25pt)}$$

   a) **(0.75pt)** $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, alors
   $$X_1(f^{-1}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y, \frac{1}{2}(y^2 - x + 1)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$
   Donc
   $$(D_{f^{-1}(x,y)} f)(X_1(f^{-1}(x,y))) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   D'où $(f_* X_1)(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}$

   b) **(0.75pt)** $X_2 = y^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$, alors
   $$X_2(f^{-1}(x,y)) = \begin{pmatrix} y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$
   Donc
   $$(D_{f^{-1}(x,y)} f)(X_2(f^{-1}(x,y))) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$$
   D'où $(f_* X_2)(x,y) = y^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$

c) **(0.75pt)** $X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1-x+y^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}$, alors

$$X_3(f^{-1}(x,y)) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(y, \frac{1}{2}(y^2-x+1)\right) + \left(\frac{1-x+y^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(y, \frac{1}{2}(y^2-x+1)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-x+y^2) \\ \frac{y}{2}\left(y^2-x\right) \end{pmatrix}$$

Donc

$$(D_{f^{-1}(x,y)}f)(X_3(f^{-1}(x,y))) = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}(1-x+y^2) \end{pmatrix}$$

D'où $\quad (f_* X_3)(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1-x+y^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}$