Exercice 1(6 pts)

1. Les points du plan sont repérés par leurs coordonnées polaires (r,θ), où $r \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Rappeler l'expression de la solution u de l'équation de Laplace relative à un disque de centre l'origine du plan.

2. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2y^2$, est-elle harmonique ?

3. Donner, en coordonnées polaires (r,θ), la solution de l'équation de Poisson, relative à un disque de centre l'origine du plan, suivante: $-\Delta u = r^2$.

Exercice 2(7 pts):

On considère les deux problèmes suivants :

$$(\mathcal{D})\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$(\mathcal{A})\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^x,\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. De quel type sont ces deux problèmes et que représente chacun d'eux ?

2. Résoudre le problème $(\mathcal{D})$.

3. Écrire la solution du problème $(\mathcal{A})$, et en déduire celle du problème

$$(\mathcal{NH})\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^x,\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 3(7 pts)

Soit le problème de la chaleur suivant :

$$(\mathcal{H}_f^h)\begin{cases} u_t - \dfrac{1}{\pi^2} u_{xx} = h(x,t), & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t), & t > 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème $(\mathcal{H}_f^h)$ pour $h \equiv 0$ et $f(x) = \sin(\pi x)$.

2. On prend $h(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$ et $f \equiv 0$.

Déterminer une solution de $(\mathcal{H}_f^h)$ sous la forme $u(x,t) = C\ t\ e^{-t}\sin(\pi x)$, où C est une constante réelle.

3. En déduire la solution générale du problème $(\mathcal{H}_f^h)$ pour $h(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$ et $f(x) = \sin(\pi x)$.

Bonus (3 pts) : *Soit u une fonction de classe C^2 dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On suppose que u est harmonique. Montrer que*

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \geq 0,$$

où n est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de Ω.

Corrigé

Exercice 1(6 pts)

1. En coordonnées polaires (r, θ), la solution u de l'équation de Laplace, relative à un disque de centre l'origine du plan, est donnée par :

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) r^n.$$

où a_0, a_n et b_n sont des coefficients réels. **(2 pts)**

2. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2y^2$.

f est harmonique si et seulement si $\Delta f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y^2 + 2x^2.$$

On remarque que $\Delta f(x,y) > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Donc f n'est pas harmonique. **(2 pts)**

3. Donnons, en coordonnées polaires (r, θ), la solution de l'équation de Poisson, relative à un disque de centre l'origine du plan, suivante: $-\Delta u = r^2$.

Cette équation est linéaire, donc sa solution est la somme d'une solution particulière et d'une fonction harmonique.

Déterminons une solution particulière: On sait que $r^2 = y^2 + x^2$.

D'après la question 2, nous pouvons écrire,

$$r^2 = \frac{1}{2}\Delta\big(f(x,y)\big) = -\Delta\left(-\frac{1}{2}f(x,y)\right) = -\Delta g(r,\theta)$$

où $g(r,\theta) = -\frac{1}{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{1}{2} r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta = -\frac{1}{8} r^4 \sin^2(2\theta)$.

Donc la fonction g est bien une solution particulière puisque, $-\Delta g(r,\theta) = r^2$.

La fonction harmonique est fournie par la première question.

En conclusion, la solution de l'équation de Poisson, $-\Delta u = r^2$ est

$$u(r,\theta) = a_0 - \frac{1}{8} r^4 \sin^2(2\theta) + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) r^n. \ \textbf{(2 pts)}$$

Exercice 2(7 pts):

On considère les deux problèmes suivants :

$$(\mathcal{D})\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$(\mathcal{A})\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = e^x, \ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Les deux problèmes sont de type hyperbolique. Ils représentent l'équation des ondes planes. Le problème $(\mathcal{D})$ est non homogène avec conditions initiales homogènes. L'autre est homogène avec conditions initiales non homogènes. **(2 pts)**

2. Résolvons le problème $(\mathcal{D})$. Par le principe de Duhamel, la solution de $(\mathcal{D})$ se déduit du problème suivant d'inconnue $v(x,t,s)$ où s est un paramètre réel :

$$\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ v(x,0,s) = 0, \ v_t(x,0,s) = x + s, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par la formule de D'Alembert, nous avons

$$v(x,t,s) = \frac{1}{2c}\int_{x-2t}^{x+2t} v_t(y,0,s)\,dy = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}(y+s)\,dy$$

$$v(x,t,s) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}y^2 + sy\right]_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{4}[4xt + 4st] = xt + st.$$

Maintenant, la solution de $(\mathcal{D})$ est donnée par

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t-s,s)ds = \int_0^t \big(x(t-s) + s(t-s)\big)ds$$

$$= \int_0^t \big((t-x)s - s^2 + xt\big)\,ds = \left[\frac{1}{2}(t-x)s^2 - \frac{1}{3}s^3 + xts\right]_0^t$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(t-x)t^2 - \frac{1}{3}t^3 + xt^2 = \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}t^3. \textbf{(3 pts)}$$

3. - Écrivons la solution du problème $(\mathcal{A})$:

Le problème étant homogène avec CI non homogènes, et x parcourant $\mathbb{R}$, nous appliquons la formule de D'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u(x+ct,0) + u(x-ct,0)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_t(y,0)\,dy$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{x+2t} + e^{x-2t}) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} dy = e^x \operatorname{ch}(2t) + t\,. \textbf{(1 pt)}$$

- *Solution du problème*

$$(\mathcal{NH})\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^x, \; u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ce problème est linéaire, sa solution est donc la somme de la solution du problème homogène avec CI non homogènes et celle du problème non homogène avec CI homogènes, i.e. la solution de $(\mathcal{NH})$ *est somme de la solution de* $(\mathcal{D})$ *et celle de* $(\mathcal{A})$. *On trouve,*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}t^3 + e^x \operatorname{ch}(2t) + t. \; (\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$$

Exercice 3(7 pts)

Soit le problème de la chaleur suivant :

$$(\mathcal{H}_f^h)\begin{cases} u_t - \frac{1}{\pi^2}u_{xx} = h(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t), & t > 0 \end{cases}$$

1. Résolvons le problème $(\mathcal{H}_f^h)$ *pour* $h \equiv 0$ *et* $f(x) = \sin(\pi x)$.

La variable x appartient à un intervalle borné, le problème est linéaire, nous utilisons la méthode de séparation des variables. En posant $u(x,t) = X(x)T(t)$ *on obtient*

$$T'X - \frac{1}{\pi^2}TX'' = 0.$$

D'où

$$\frac{T'}{T} - \frac{1}{\pi^2}\frac{X''}{X} = 0 \Longrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{1}{\pi^2}\frac{X''}{X}.$$

Les variables t et x étant indépendantes, il existe une constante réelle λ *telle que*

$$\frac{T'}{T} = \lambda = \frac{1}{\pi^2}\frac{X''}{X}.$$

On aboutit ainsi aux deux équations suivantes

$$T' - \lambda T = 0 \qquad et \qquad X'' - \lambda\pi^2 X = 0.$$

- *Résolvons l'équation en T :*

$$T' - \lambda T = 0 \Longrightarrow T' = \lambda T \Longrightarrow T(t) = ke^{\lambda t}.$$

La température T doit être bornée, on prend donc $\lambda \le 0$, *i.e.* $\lambda = -\alpha^2, \alpha \ge 0$.

- *Résolvons l'équation en X avec* $\lambda = -\alpha^2$:

$$X'' + \alpha^2\pi^2 X = 0.$$

L'équation caractéristique est: $r^2 + \alpha^2\pi^2 = 0$, $r = i\pi\alpha$ *ou* $r = -i\pi\alpha$.

D'où $$X(x) = A\cos(\alpha\pi x) + B\sin(\alpha\pi x).$$

Déterminons les constantes A et B.

On a $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ *pour tout* $t > 0$, *d'où* $X(0) = X(1) = 0$.

$$\left.\begin{matrix} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\alpha\pi) + B\sin(\alpha\pi) = 0 \end{cases}$$

On arrive à l'équation $B\sin(\alpha\pi) = 0$. *Si on prend* $B = 0$, *on trouve* $X \equiv 0$, *solution refusée. Prenons alors* $\sin(\alpha\pi) = 0$.

$$\sin(\alpha\pi) = 0 \Longrightarrow \alpha = n, n \in \mathbb{N}.$$

En conclusion, une famille de solutions en X est :

$$X_n(x) = A_n\cos(n\pi x) + B_n\sin(n\pi x)$$

Et une famille de solution en T est :

$$T_n(t) = k_n e^{-n^2 t}, \qquad car\ \lambda = -\alpha^2 = -n^2.$$

En conséquence une famille de solution en u est

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-n^2 t}(a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x))$$

où l'on a posé $k_n A_n = a_n$ *et* $k_n B_n = b_n$.

Par le principe de superposition on trouve

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n\geq 1} e^{-n^2 t}(a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x)).$$

Reste à calculer les coefficients a_n *et* b_n *:*

On a $u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x)$ *d'où*

$$\sin(\pi x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x))$$

Par une simple identification on trouve

$$a_n = 0, \forall n \geq 0, \qquad et\ \ b_1 = 1,\ \ b_n = 0, \forall n \geq 2$$

Et la solution est donnée par

$$u(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)\,.\ (\mathbf{3\ pts})$$

2. On prend $h(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$ *et* $f \equiv 0$.

Déterminons une solution de $(\mathcal{H}_f^h)$ *sous la forme* $u(x,t) = C\,t\,e^{-t}\sin(\pi x)$, *où* C *est une constante réelle.*

Il suffit de dériver et remplacer dans l'équation: on trouve $C = 1$. **(2 pts)**

3. Solution générale de $(\mathcal{H}_f^h)$ *pour* $h(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$ *et* $f(x) = \sin(\pi x)$.

Le problème est linéaire, non homogène avec des conditions non homogènes, sa solution est donc la somme des solutions des problèmes précédents :

$$u(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x) + \,t\,e^{-t}\sin(\pi x) = (1+t)e^{-t}\sin(\pi x)\,. \ \textbf{(2 pts)}$$

Bonus (3 pts) : *Soit* u *une fonction de classe* C^2 *dans un domaine borné* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *On suppose que* u *est harmonique. Montrer que*

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \geq 0,$$

où n *est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de* Ω.

Il suffit d'appliquer la formule de Green:

Si v *et* w *sont des fonctions de classe* C^2 *dans* Ω, *alors*

$$\int_{\Omega} v\,\Delta w\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial w}{\partial n}ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla w\,dx$$

En prenant $v = u$ *et* $w = u$ *on trouve*

$$\int_{\Omega} u\,\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u\,dx$$

Mais u *est harmonique donc*

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2\,dx \ \geq 0. \ \textbf{(3 pts)}$$