Université de Tlemcen 2023/2024
Département de Mathématiques L3 Mathématiques
Module: Optimisation sans contraintes

Epreuve de rattrapage
Corrigé

Exercice 1 (7 points)
On considère le problème (P) suivant:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} 2x_1x_2e^{-(4x_1^2+x_2)/8}$$

1. Résoudre le problème (P)
2. Faire une itération de la méthode de Newton à partir du point $x^{(0)} = (1,-4)^T$ avec un pas égal à 1.

Solution
1. **2 points**
Commençons par trouver les points critiques solutions de l'équation d'Euler. On pose $f(x_1,x_2) = 2x_1x_2e^{-(4x_1^2+x_2)/8}$
Le gradient est

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2\left(x_2 - x_1^2x_2\right)e^{-(4x_1^2+x_2)/8} \\ 2\left(x_1 - x_1x_2/8\right)e^{-(4x_1^2+x_2)/8} \end{pmatrix}$$

L'équation d'Euler $\nabla f(x_1,x_2) = 0$ est équivalente au système

$$\begin{cases} x_2(1-x_1^2) = 0 \\ x_1\left(1 - x_2/8\right) = 0 \end{cases}$$

qui admet pour solutions: $[x_1 = 0, x_2 = 0], [x_1 = 1, x_2 = 8]$ et $[x_1 = -1, x_2 = 8]$.
Les points critiques sont $(0,0)^T, (1,8)^T, (-1,8)^T$.

3.5 points
On doit étudier leur nature pour cela calculons la matrice hessienne de f.

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = e^{-(4x_1^2+x_2)/8}\begin{pmatrix} 2x_1x_2\left(x_1^2-3\right) & \frac{1}{4}\left(x_2-8\right)\left(x_1^2-1\right) \\ \frac{1}{4}\left(x_2-8\right)\left(x_1^2-1\right) & \frac{1}{32}x_1\left(x_2-16\right) \end{pmatrix}$$

Au point $(0,0)^T$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ donc $(0,0)$ est un point selle.
Au point $(1,8)^T$

$$\nabla^2 f(1,8) = e^{-(4+8)/8}\begin{pmatrix} 16\left(1-3\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{32}\left(8-16\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

C'est un maximum.
Au point $(-1,8)^T$

$$\nabla^2 f(-1,8) = \begin{pmatrix} 32e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

C'est un minimum.
Finalement le problème (P) admet l'unique solution $x^* = (-1,8)^T$.
2. **1.5 points**
Une itération de la méthode de Newton s'écrit:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \nabla^2 J(x^{(0)})^{-1} \nabla J(x^{(0)}).$$

$$\nabla^2 f(1,-4) = \begin{pmatrix} -8\,(1-3) & 0 \\ 0 & \frac{1}{32}\,(-4-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Sur 8 points)
On considère le problème (P_2)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle$$

où A est symétrique définie positive.
1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions, puis résoudre ce problème.
2. Montrer que si $d^{(0)}, \ldots, d^{(k)}$ est un ensemble de directions $A-$conjuguées alors les vecteurs $d^{(0)}, \ldots, d^{(k)}$ sont linéairement indépendants.
3. Ecrire l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution de (P_2).
Solution

1. **2 points**
La fonction $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est polynomiale donc continue.
De plus comme la matrice A est symétrique définie positive ses valeurs propres sont réelles, positives strictement et on a l'encadrement suivant:

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\langle x, Ax \rangle}{< x, x >} \leq \lambda_{\max},$$

ce qui donne

$$\langle x, Ax \rangle \geq \lambda_{\min} \|x\|^2.$$

A partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\langle b, x \rangle \leq \|b\| \, \|x\|,$$

il en découle

$$J(x) \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|x\|^2 - \|b\| \, \|x\| \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to +\infty.$$

La fonction J est donc coercive.
Le problème (P_2) admet donc une solution.
1 point
La fonction étant strictement convexe car $\nabla^2 J(x) = A$ est définie positive la solution est unique.

1 point
L'unique solution du problème $\overline{x}$ est solution du problème

$$\nabla J(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

2. **2 points**
Supposons qu'ils existent $\lambda_i, i = 0, 1, \ldots, k$ tels que

$$\lambda_0 d^{(0)} + \cdots + \lambda_k d^{(k)} = 0$$

en multipliant par A et en prenant le produit scalaire avec $d^{(i)}$ on a:

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \left\langle d^{(i)}, Ad^{(j)} \right\rangle = 0,\ \forall i = 0, 1, \ldots k$$

donc

$$\lambda_i \left\langle d^{(i)}, Ad^{(i)} \right\rangle = 0, \forall i = 0, 1, \ldots k$$

comme A est définie positive alors $\forall i = 0, 1, \ldots k$

$$\left\langle d^{(i)}, Ad^{(i)} \right\rangle > 0$$

par conséquence

$$\lambda_i = 0, \forall i = 0, 1, \ldots k.$$

3. **2 points**
L'algorithme du gradient conjugué
$k = 0, \quad x^{(0)}$ donné
$g^{(0)} = \nabla J(x^{(0)}) = Ax^{(0)} - b$
$d^{(0)} = -g^{(0)}$
Pour $k = 0, \ldots, n-1$ faire

$$\alpha_k = -\frac{\left\langle g^{(k)}, d^{(k)} \right\rangle}{\left\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \right\rangle} \tag{1}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

$$g^{(k+1)} = \nabla J(x^{(k+1)})$$

et

$$\beta_k = \frac{\left\langle g^{(k+1)}, Ad^{(k)} \right\rangle}{\left\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \right\rangle} \tag{2}$$

$$d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)} \tag{3}$$

Exercice 3 (Sur 5 points)
On considère le problème (P_3) suivant

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} J(x_1,x_2)$$

avec

$$J(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{25}{2}x_2^2 + 3x_1x_2 - 12x_1 - \sqrt{\pi}x_2 - 6.$$

1. Ecrire le problème (P_3) sous la forme

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - < b, x > +c,$$

avec A symétrique définie positive.
2. Ecrire l'algorithme du gradient à pas fixe α pour la résolution d'un problème quadratique.
3.Pour quelles valeurs de α, la suite $\left(x^{(k)}\right)$ définie par la méthode du gradient à pas fixe converge-t-elle vers $\overline{x}$ la solution de (P_3)? Quel est le pas optimal $\overline{\alpha}$?
On donne: $\sqrt{153} = 3\sqrt{17} \approx 12.369$
Solution
1. **2 points**
Le problème (P_3) s'écrit

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - < b, x > +c$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 25 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 12 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \text{ et } c = -6.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = 3\sqrt{17} + 13 > 0$ et $\lambda_2 = 13 - 3\sqrt{17} > 0$. On déduit que A est définie positive.
2. **1 point**
Soit $\alpha > 0$ et $x^{(0)}$ un vecteur initial donné. La suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donnée par la formule

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha\left(Ax^{(k)} - b\right)$$

3. **2 points**
La méthode du gradient à pas fixe converge si et seulement si $\alpha \in \left]0, \frac{2}{\rho(A)} = \frac{2}{3\sqrt{17}+13}\right[$.
Le pas optimal est donné par la formule

$$\overline{\alpha} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{1}{13}.$$