Université de Tlemcen 2023/2024
Département de Mathématiques L3 Mathématiques
Module: Optimisation sans contraintes

Epreuve finale
Corrigé

Exercice 1 (6 points)
On considère le problème (P) suivant

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} J(x)$$

où
$$J(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{7}{2}x_2^2$$

1. Écrire la relation de récurrence obtenue si on met en œuvre l'algorithme du gradient à pas constant $\alpha>0$.
2. Écrire la suite obtenue à partir de $x^{(0)}$ donné et en prenant $\alpha=\dfrac{1}{7}$, puis montrer qu'elle converge vers la solution du problème (P).
3. $\alpha=\dfrac{1}{7}$ est-elle la valeur optimale du paramètre α?

Solution
1.**Sur 2 points**
La suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\alpha\nabla J(x^{(k)})$$

c'est à dire
$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)}=(1-\alpha)\,x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=(1-7\alpha)\,x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

Pour tout $x^{(0)}\in\mathbb{R}^2$, le vecteur $x^{(1)}$ est donné par

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}=(1-\alpha)\,x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)}=(1-7\alpha)\,x_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

puis $x^{(2)}$.
$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)}=(1-\alpha)^2\,x_1^{(0)} \\ x_2^{(2)}=(1-7\alpha)^2\,x_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

ainsi de suite par récurrence on obtient la suite

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)}=(1-\alpha)^k\,x_1^{(0)} \\ x_2^{(k)}=(1-7\alpha)^k\,x_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

2. **Sur 2 points**

Pour $\alpha = \frac{1}{7}$

$$\left(\begin{array}{c} x_1^{(k)} = \left(\frac{6}{7}\right)^k x_1^{(0)} \\ x_2^{(k)} = 0 \end{array} \right)$$

quand $k \to +\infty$, la suite géométrique $\left(\frac{6}{7}\right)^k \to 0$ et donc $x^{(k)} \to 0_{\mathbb{R}^2}$.

2. **Sur 2 points**

Quel est le pas optimal $\overline{\alpha}$.

On note que

$$J(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{7}{2}x_2^2 = \frac{1}{2} < x, Ax >,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

La matrice A est définie positive.d'après le théorème du cours, le pas optimal de la méthode du gradient à pas fixe.est donné par la formule

$$\overline{\alpha} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 2 (7 points)

Soit $a \geq 0$. On considère le problème

$$(P_a) : \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_a(x,y), \qquad \text{où } f_a(x,y) = a\left(x^4 + y^4\right) + x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y.$$

1. Le problème (P_0) possède-t-il une solution?

2. Pour $a > 0$. Démontrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty \qquad \text{et } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_a(x,y) \geq g\left(\|(x,y)\|_2\right).$$

Conclure.

3. Résoudre le problème (P_a) pour $a > 0$.

On rappelle l'identité pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$

Solution

1. . **Sur 1 point**

$$\nabla f_0(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y - 2 \\ 2y - 2x - 2 \end{pmatrix}$$

Le système $\nabla f_0(x,y) = 0$ n'admet pas de solution, en effet

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y - 2 = 0 \\ 2y - 2x - 2 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -4 = 0 \end{array} \right. .$$

Donc le problème (P_0) n'admat pas de solution.

2. **Sur 3 points**

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0, \qquad x^4 \geq 2x^2 - 1, \qquad y^4 \geq 2y^2 - 1$$

et

$$2x+2y\leq 2\sqrt{2}\left\|(x,y)\right\|$$

$$f_a(x,y)=a\left(x^4+y^4\right)+x^2+y^2-2xy-2x-2y.\geq 2a\left(x^2+y^2\right)-2\sqrt{2}\left\|(x,y)\right\|-2a$$

On pose

$$g(t)=2at^2-2\sqrt{2}t-2a\rightarrow+\infty\quad \text{quand } t\rightarrow+\infty.$$

La fonction f est continue et coercive le problème (P_a) admet au moins une solution.

3. **Sur 3 points**

Le gradient est

$$\nabla f_0(x,y)=\begin{pmatrix} 4ax^3+2x-2y-2 \\ 4ay^3+2y-2x-2 \end{pmatrix}$$

le système d'Euler

$$\nabla f_0(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{cases} 4ax^3+2x-2y-2=0 \\ 4ay^3+2y-2x-2=0 \end{cases}$$

en retranchant membre à membre on obtient l'equation

$$4a\left(x^3-y^3\right)+4\left(x-y\right)=0\Leftrightarrow(x-y)\left(a\left(x^2+xy+y^2\right)+1\right)=0$$

or $\quad xy\geq-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\quad$ alors $\quad x^2+xy+y^2\geq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$ donc

$$a\left(x^2+xy+y^2\right)+1>0$$

ce qui donne $x=y$.

En remplaçant dans l'une des équations du système on obtient $x=y=\left(\frac{1}{2a}\right)^{1/3}$.

Puisque pour tout $a>0$, le problème (P_a) admet une solution le point $\left(\left(\frac{1}{2a}\right)^{1/3},\left(\frac{1}{2a}\right)^{1/3}\right)$ est le minimum global de f_a.

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction $f(x)=\left(x_1+x_2^2\right)^2$.

1. Montrer que la direction $d=(1,-1)^t$ est une direction de descente au point $x^{(0)}=(0,1)^t$.
2. Déterminer le pas optimal α_0 qui minimise $g(\alpha)=f\left(x^{(0)}+\alpha d\right)$ puis calculer $x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0 d$
3. Calculer la direction $\widetilde{d}$ associée à la méthode de Newton au point $x^{(0)}$. S'agit-il d'une direction de descente?
4. Faire une itération de la méthode de Newton. Conclure.

Solution

1. **Sur 1 point**

Le gradient de la fonction f est

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix} 2\left(x_1+x_2^2\right) \\ 4x_2\left(x_1+x_2^2\right) \end{pmatrix}$$

ce qui implique

$$\nabla f(x^{(0)})=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$\left\langle d,\nabla f\left(x^{(0)}\right)\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle=-2<0.$$

On conclu que la direction $\widetilde{d}$ est bien une direction de descente au point $x^{(0)}$.

2. **Sur 2.5 points**

$x^{(0)} + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$

$$g(\alpha) = f\left(x^{(0)} + \alpha d\right) = \left(\alpha + (1-\alpha)^2\right)^2 = \left(\alpha^2 - \alpha + 1\right)^2$$

ce qui implique

$$g'(\alpha) = 2\left(2\alpha - 1\right)\left(\alpha^2 - \alpha + 1\right)$$

$g'(\alpha) = 0$ est équivalent à $\alpha = \dfrac{1}{2}$

$g''(\alpha) = 12\alpha^2 - 12\alpha + 6 \Longrightarrow g''(\frac{1}{2}) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ est le minimum de la fonction g.

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Sur 2.5 points**

La direction de Newton est $\tilde{d} = -\left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(0)}\right)$

La matrice hessienne est

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 4x_2 \\ 4x_2 & 4x_1 + 12x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Au point $x^{(0)}$

$$\nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

son inverse est

$$\left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ce qui implique

$$\left(\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)\right)^{-1} \nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La direction de la méthode de Newton est donc

$$\widetilde{d} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on voit que

$$\left\langle \widetilde{d}, \nabla f\left(x^{(0)}\right)\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle = -2 < 0$$

On conclu que la direction $\widetilde{d}$ est bien une direction de descente.

3. **Sur 1 point**

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \widetilde{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit que $\nabla f\left(x^{(1)}\right) = 0$ alors la méthode de Newton converge en une itération vers un point critique de plus $f\left(x^{(1)}\right) = 0$ alors c'est un minimum global car $f(x) \geq 0$.
Il n'est pas unique car on voit bien que $(0,0)^T$ est aussi minimum global.