Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2023-2024
Module : Équations différentielles
Durée : 01h. 40min.

Niveau : ***Troisième Année Licence Mathématiques***

EXAMEN FINAL
08 JANVIER 2024

Exercice 1 (06 points).

On considère le système différentiel

$$X'(t) = AX(t), \tag{1}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
2) Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées dans la question précédente.
3) En déduire les solutions du système différentiel (1).

Exercice 2 (10 points).

On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{2}$$

où pour tout $t > 0$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (2).
2) Montrer que $\psi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (2).
3) Calculer $W(t) =$dét$\begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \end{pmatrix}$.
4) En déduire que la famille $\{\varphi(t), \psi(t)\}$ est un système fondamental de solutions du système différentiel (2).
5) Donner la matrice fondamentale du système différentiel (2).
6) En déduire les solutions du système différentiel (2).
7) Montrer que la résolvante $\mathfrak{R}$ est donnée par

$$\mathfrak{R}(t,t_0) = \begin{pmatrix} 2\frac{t}{t_0} - 1 & \frac{1}{t_0} - \frac{t}{t_0^2} \\ 2\frac{t^2}{t_0} - 2t & 2\frac{t}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^2} \end{pmatrix}, \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } t_0 > 0.$$

8) En déduire la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où $t_0 > 0$ et a et b sont deux nombres réels.

9) Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \\ X(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exercice 3 (04 points).

On considère le système différentiel

$$X'(t) = AX(t), \tag{3}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice A admet une valeur propre double, égale à -1.
2) Déterminer les solutions du système différentiel (3).
3) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$.
4) Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. : 2023-2024
Module : Équations différentielles

Corrigé de l'examen final du Lundi 08 Janvier 2024.

Exercice 1

1) On a,

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1).$$

2pts

Par suite les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

2) Les vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées dans la question précédente.

On note par V_1 le vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$.

On a,

$$A V_1 = \lambda_1 V_1 .$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,
$$\begin{pmatrix} -x \\ x+2y+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $\begin{cases} x+2y+z=-y \\ x+z=-z \end{cases}$

C'est-à-dire, $\begin{cases} y = \frac{z}{3} \\ x = -2z \end{cases}$

On prend $$V_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$ 1pt

On note par V_2 le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$.

On a, $$A V_2 = \lambda_2 V_2.$$

C'est-à-dire,
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $$\begin{pmatrix} -x \\ x+2y+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $$\begin{cases} -x = x \\ x+2y+z = y \\ x+z = z. \end{cases}$$

C'est-à-dire, $$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z. \end{cases}$$

On prend
$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
1 pt.

On note par V_3 le vecteur propre associé à $\lambda_3 = 2$.

On a,
$$A V_3 = \lambda_3 V_3.$$
C'est-à-dire,
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
C'st-à-dire,
$$\begin{pmatrix} -x \\ x+2y+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$
C'st-à-dire,
$$\begin{cases} -x = 2x \\ x+2y+z = 2y \\ x+z = 2z. \end{cases}$$
C'st-à-dire,
$$x = z = 0$$
On prend
$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
1 pt.

3) En déduire les solutions du système différentiel (1).

On a,

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} V_3, \text{ avec } c_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i=1,2,3.$$

C'est-à-dire,

$$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1pt.

$$= \begin{pmatrix} -6e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t} & e^{t} & e^{2t} \\ 3e^{-t} & -e^{t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1) Montrons que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (2).

Pour tout $t>0$, on a $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et

$$A(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, 1pt.

$\forall t>0, \ \varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t).$

C'st-à-dire φ est une solution du système différentiel (2).

2) Montrons que $\psi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (2).

Pour tout $t>0$, on a $\psi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$,

et $A(t)\psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

1pt.

Alors, $\forall t>0, \ \psi'(t) = A(t)\psi(t).$

C'st-à-dire ψ est une solution du système différentiel (2).

3) Pour tout $t>0$, on a

$$W(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{vmatrix}$$

0,5 pts

$$= \frac{1}{2}t^2 - t^2 = -\frac{t^2}{2}.$$

4) En déduire que la famille $\{\varphi(t), \psi(t)\}$ est un système fondamental de solutions du système différentiel (2).

Comme,

i) les fonctions φ et ψ sont solutions du système différentiel (2),

0,5 pts

et

ii) les fonctions φ et ψ sont linéairement indépendantes car $W(t) = -\frac{t^2}{2} \neq 0$ (vu que $t>0$),

alors la famille $\{\varphi(t), \psi(t)\}$ est un système fondamental de solutions du système différentiel (2).

5) La matrice fondamentale du système différentiel (2) est donnée par

$$M(t) = (\varphi(t) \ \ \psi(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}.$$ 1 pt.

6) Les solutions du système différentiel (2) sont données par

$$X(t) = M(t).C, \quad \text{avec } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$ 1 pt.

$$= \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 t \\ c_1 t + c_2 t^2 \end{pmatrix}.$$

7) Pour tout $t > 0$ et $t_0 > 0$, on a

$$R(t, t_0) = M(t)\, M^{-1}(t_0).$$ 0,5 pts

Comme

$$M^{-1}(t_0) = \frac{1}{\text{dét}(M(t_0))} \left(\text{com}\, M(t_0)\right)^t$$

$$= -\frac{2}{t_0^2} \begin{pmatrix} t_0^2 & -t_0 \\ -t_0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$$

1 pt.

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{t_0} \\ \frac{2}{t_0} & -\frac{1}{t_0^2} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{t_0} \\ \frac{2}{t_0} & -\frac{1}{t_0^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2t}{t_0} - 1 & \frac{1}{t_0} - \frac{t}{t_0^2} \\ \frac{2t^2}{t_0} - 2t & \frac{2t}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^2} \end{pmatrix}.$$

0,5 pts

8) La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t), \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = R(t, t_0)\,X(t_0)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2t}{t_0} - 1 & \frac{1}{t_0} - \frac{t}{t_0^2} \\ \frac{2t^2}{t_0} - 2t & \frac{2t}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

1 pt.

$$= \begin{pmatrix} a\left(\frac{2t}{t_0} - 1\right) + b\left(\frac{1}{t_0} - \frac{t}{t_0^2}\right) \\ a\left(\frac{2t^2}{t_0} - 2t\right) + b\left(\frac{2t}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^2}\right) \end{pmatrix}.$$

9) La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \\ X(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = R(t,1)\,X(1) + \int_1^t R(t,s)\,B(s)\,ds,$$ 0,5 pts

avec $B(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^2 \end{pmatrix}$.

Comme $X(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$X(t) = \int_1^t \begin{pmatrix} \frac{2t}{s} - 1 & \frac{1}{s} - \frac{t}{s^2} \\ \frac{2t^2}{s} - 2t & \frac{2t}{s} - \frac{t^2}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \end{pmatrix} ds$$

1pt.

$$= \int_1^t \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t\,(t-1) \\ t^2\,(t-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}.$$ 0,5 pts

Exercice 3

1) On a,

$$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \text{dét}(\lambda I_2 - A) &= \lambda(\lambda+2)+1 \\ &= (\lambda+1)^2. \end{aligned}$$

0,5 pts

Par suite, la matrice A admet une valeur propre, égale à -1.

2) Déterminons les solutions du système différentiel (3).

Tout d'abord cherchons les vecteurs propres de A.

On note par V_1 le vecteur propre associé à la valeur propre -1.

On a,

$$AV_1 = \lambda_1 V_1.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -2x+y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} -2x+y = -x \\ -x = -y. \end{cases}$$

C'st-à-dire, $x = y$.

Alors on prend $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 0,25 pts

On a un seul vecteur propre, alors A n'st pas diagonalisable.

L'idée est de chercher un deuxième vecteur V_2 tel que

$$(A+I)V_2 = V_1. \quad 0{,}25 \text{ pts}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$-x+y=1.$$

On prend par exemple $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 0,5 pts

Par suite les solutions du système différentiel (3) sont données par

$$X(t) = c_1 e^{-t} V_1 + c_2 e^{-t} e^{(A+I)t} V_2, \text{ avec } c_1 \in \mathbb{R} \text{ et } c_2 \in \mathbb{R}. \quad 0{,}5 \text{ pts}$$

$$= c_1 e^{-t} V_1 + c_2 e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+I)^n}{n!} t^n V_2. \quad 0{,}25 \text{ pts}$$

$$= c_1 e^{-t} V_1 + c_2 e^{-t}\left[V_2 + (A+I)V_2 t + \frac{(A+I)^2}{2!} V_2 t^2 + \dots\right]$$

Comme $(A+I)V_2 = V_1$ et $(A+I)^2 V_2 = (A+I)V_1$
$= 0_{\mathbb{R}^2}$ car V_1 est un vecteur propre,

on obtient

$$X(t) = c_1 e^{-t} V_1 + c_2 e^{-t} [V_2 + t V_1] \quad (0{,}25 \text{ pts})$$

$$= c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ e^{-t} & (1+t) e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (0{,}25 \text{ pts})$$

3) On a,

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ e^{-t} & (1+t) e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

4) La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = R(t,0)\,X(0)$$ 0,25 pts

$$= M(t)\,M^{-1}(0)\,X(0), \text{ avec } M(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Comme $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $M^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 0,25 pts

Par suite,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} \\ -(1+2t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$ 0,25 pts