Département de mathématiques 2023/2024

Module: Optimisation sans contraintes

Contrôle continu

Exercice 1 (**Sur 6 points**)

Soit α, un paramètre réel et f la fonction définit sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\alpha xy.$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction est-elle convexe? strictement convexe? concave?
2. Pour $\alpha = 1/2$, résoudre le problème:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y),$$

Solution

1. **Sur 5 points**

Comme la fonction f est une fonction polynomiale de classe C^2, on peut caracteriser la convexité à partir de la matrice hessienne.

Le gradient de f :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2\alpha y \\ 2y + 2x\alpha \end{pmatrix}$$

Le hessien est

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice hessienne $\lambda_1 = 2 - 2\alpha, \lambda_2 = 2 + 2\alpha$.

$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ si et seulement si $\alpha \in [-1,1]$

la fonction f est convexe si et seulement si $\alpha \in [-1,1]$, elle est strictement convexe si $\alpha \in]-1,1[$.

Si $\alpha \in (-\infty,-1)$ alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Si $\alpha \in (1,\infty)$ alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$. De ce fait la fonction f n'ai jamais concave.

2. **Sur 1 point**

Pour $\alpha = 1/2$, la fonction f est strictement convexe et quadratique elle admet donc l'unique solution de $\nabla f(x,y) = 0$, $(0,0)^T$.

Exercice 2 (**Sur 6 points**)

Trouver les points critiques de la fonction

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}.$$

puis discuter leur nature.

Solution

Sur 1 point

$$\nabla f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} y\left(1-x^2\right)e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \\ x\left(1-y^2\right)e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \end{pmatrix}.$$

Sur 1 point

L'équation d'Euler $\nabla f\left(x,y\right) = 0$ a pour solutions les points critiques suivants :

$$(0,0)\,,(1,1)\,,(-1,-1)\,,(1,-1)\ \text{ et }\ (-1,1)\,.$$

Sur 1 point

Pour déterminer leurs natures nous allons utiliser la condition du second ordre.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} (x^3y-3xy)\,e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} & (1-x^2-y^2+x^2y^2)\,e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \\ (1-x^2-y^2+x^2y^2)\,e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} & (xy^3-3xy)\,e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \end{pmatrix}$$

Sur 1 point

Au point $(0,0)$

$$\nabla^2 f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de $\nabla^2 f\,(0,0)$ sont $\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = -1 < 0$. Ces valeurs propres sont non nulles mais de signe mixte, alors il s'agit d'un point selle.

Sur 1 point

Au point $(1,1)$ la matrice hessienne est

$$\nabla^2 f\,(1,1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\nabla^2 f\,(1,1)$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -2e^{-1} < 0$ permet d'affirmer que $\nabla^2 f\,(1,1)$ est une matrice définie négative, le point $(1,1)$ est donc un maximum local.

Au point $(-1,-1)$ la matrice hessienne est

$$\nabla^2 f\,(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

et donc le point $(-1,-1)$ est donc un maximum local.

Sur 1 point

Au point $(1,-1)$ la matrice hessienne est

$$\nabla^2 f\,(1,-1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} = \nabla^2 f\,(1,-1)$$

Cette matrice est définie positive alors les points $(1,-1)\,,(-1,1)$ sont des minimums locaux.

Exercice 3 (8 points: 2points par réponse justifiée)

Pour chacune des affirmations suivantes, spécifier si elles sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse. Démontrer ou donner un contre-exemple.

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et x^* tels que $\nabla f\,(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f\,(x^*)$ est semi-définie positive. Alors x^* est un minimum local de f.

Fausse. Prenons par exemple la fonction $f(x_1,x_2) = -x_1^4 - x_2^4$

le gradient de la fonction f est $\nabla f\,(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -4x_1^3 \\ -4x_2^3 \end{pmatrix}$ et le hessien est $\nabla^2 f\,(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 & 0 \\ 0 & -12x_2^2 \end{pmatrix}$

pour $x=(0,0)^t$ on a $\nabla f(x^*)=0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive mais x^* n'est pas un minimum local de f .
Puisque $\forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x) \leq f(x^*) = 0.$
2. Si f est strictement convexe dans $\mathbb{R}^n$ alors f admet au plus un minimum.
Vraie. On suppose que f admet deux minima x^* et y^* avec $x^* \neq y^*$. D'après la convexité de la fonction f

$$f\left(\frac{x^*}{2}+\frac{y^*}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x^*)+\frac{1}{2}f(y^*)=f(x^*)$$

ce qui impossible par définition du minimum.
3. Si $f(x)=\frac{1}{2}\langle x,Qx\rangle - \langle g,x\rangle$ est une fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ où Q est une matrice carrée. Alors $\nabla f(x) = Qx-g$.
Fausse. On a

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle x+h, Q(x+h)\rangle - \langle g, x+h\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle x,Qx\rangle + \frac{1}{2}\langle h,Qh\rangle + \frac{1}{2}\langle x,Qh\rangle + \frac{1}{2}\langle h,Qx\rangle - \langle g,x\rangle - \langle g,h\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle x,Qx\rangle - \langle g,x\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \left(Q+Q^t\right)x-g,h\right\rangle + \frac{1}{2}\langle h,Qh\rangle \\
&= f(x) + \frac{1}{2}\left\langle \left(Q+Q^t\right)x-g,h\right\rangle + \frac{1}{2}\langle h,Qh\rangle
\end{aligned}$$

de plus

$$0 \leq \frac{|\langle h,Qh\rangle|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2\|Q\|}{\|h\|} = \|Q\|\,\|h\| \to 0 \ \text{ quand } \ \|h\| \to 0$$

ce qui implique

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2}\left(Q+Q^t\right)x - g.$$

4. Le problème $\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} 2xy - x^4 - y^4$ possède une solution.
Vraie
ce problème est équivalent au problème de minimisation $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^4+y^4-2xy$.
On pose $f(x,y)=x^4+y^4-2xy$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$,de plus pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
x^4 &\geq 2x^2-1 \\
y^4 &\geq 2y^2-1
\end{aligned}$$

et

$$-2xy \geq -x^2-y^2$$

alors

$$f(x,y) \geq x^2+y^2-2$$

remarquons que si $g(t)=t^2-2$ alors $g(t)\to+\infty$ quand $t\to+\infty$ alors

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty.$$

D'où la coercivité de f. Il s'en suit que le problème de minimisation admet une solution et donc le problème de maximisation possède une solution.