Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2023-2024

L3-Math.
Module : Mesure et intégration
Durée : 1h30

Contrôle continu : Mesure et intégration

14/12/2023

Exercice 1 (Questions de cours 3 pts).

Donner les définitions des notions suivantes :

1. Une mesure extérieure sur un ensemble E.

2. La convergence en mesure d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, définie de $(E, \mathscr{F}, \mu)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 2 (5 pts).

Soit $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré. Supposons que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, où $(E_n)_n$ est une suite de parties mesurables de E disjoints deux à deux telle que $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathscr{F} & \to & [0, +\infty] \\ A & \mapsto & \nu(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(A \cap E_k)}{\mu(E_k) + 1}. \end{array}$$

*1. Montrer que ν est une **mesure finie** sur $(E, \mathscr{F})$.*

*2. Soit $B \in \mathscr{F}$. Montrer que $\nu(B) = 0$ **si et seulement si** $\mu(B) = 0$.*

Exercice 3 (4 pts).

On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ donnée par

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[n^3 - \frac{1}{5^n}, n^3 + \frac{1}{5^n} \right] \right) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

1. Expliquer pourquoi A est un élément de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\lambda(A) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (5 pts).

Soient E un ensemble et A une partie de E. On pose

$$\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{P}(E) : \ B \subset A \text{ ou } B^c \subset A\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est une tribu sur E.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On munit E de la tribu $\mathscr{F}$ et $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Montrer que si f est constante sur A^c alors f est mesurable.

Exercice 5 (3 pts).

Soit $(E, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que g est mesurable.

Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2023-2024

L3-Math.
Module : Mesure et intégration

Corrigé du contrôle continu

Exercice 1 (Questions de cours 3 pts).
Donner les définitions des notions suivantes :
1. Une mesure extérieure sur un ensemble E.
2. La convergence en mesure d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, définie de $(E, \mathscr{F}, \mu)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Solution
Voir le cours.

Exercice 2 (4 pts).
Soit $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré. Supposons que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, où $(E_n)_n$ est une suite de parties mesurables de E disjoints deux à deux telle que $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.
Soit l'application

$$\begin{aligned} \nu : \mathscr{F} &\to [0, +\infty] \\ A &\mapsto \nu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(A \cap E_k)}{\mu(E_k) + 1}. \end{aligned}$$

*1. Montrer que ν est une **mesure finie** sur $(E, \mathscr{F})$.*
*2. Soit $B \in \mathscr{F}$. Montrer que $\nu(B) = 0$ **si et seulement si** $\mu(B) = 0$.*

Solution
1. – Montrons que ν est une mesure.
 — $\nu(\emptyset) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(\emptyset \cap E_k)}{\mu(E_k)+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(E_k)+1} = 0.$ $\boxed{\text{0.5 pt}}$
 — Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{F}$ disjoints deux à deux, alors on a

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n \cap E_k\right)}{\mu(E_k) + 1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} (A_n \cap E_k)\right)}{\mu(E_k) + 1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{\mu(E_k) + 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(A_n \cap E_k\right) \text{ car } \mu \text{ est une mesure} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{\mu\left(A_n \cap E_k\right)}{\mu(E_k) + 1} \text{ où on a, d'après le cours, le droit d'échanger} \\ &\quad \text{les sommes quand il s'agit de sommes de termes positifs.} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \boxed{\text{1 pt}} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que ν est une mesure sur E.
– Montrons que ν est finie.

$$\nu(E)=\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k}\frac{\mu(E\cap E_k)}{\mu(E_k)+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k}\frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k)+1}.$$

Or

$$2^{-k}\frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k)+1}\leq 2^{-k}\quad \forall k\geq 1 \ \boxed{0.5 \text{ pt}}$$

et la série de terme général 2^{-k} est convergente (série géométrique de raison $1/2$) donc par comparaison des séries à termes positifs on conclut que $\nu(E)<+\infty$. $\boxed{1 \text{ pt}}$
2. Soit $B\in\mathscr{F}$. Montrons que $\nu(B)=0$ **si et seulement si** $\mu(B)=0$.
"$\Rightarrow$" Si $\nu(B)=0$ alors $2^{-k}\frac{\mu(B\cap E_k)}{\mu(E_k)+1}=0$ pour tout $k\geq 1$ car il s'agit d'une série à termes positifs donc $\mu(B\cap E_k)=0$ pour tout $k\geq 1$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu(B\cap E)=\mu\left(B\cap\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\right) \text{ puisque } E=\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}B\cap E_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(B\cap E_k) \text{ car les } E_k \text{ sont disjoints deux à deux}\\
&= 0.\ \boxed{1 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Supposons que $\mu(B)=0$ alors $\mu(B\cap E_k)=0$ pour tout $k\geq 1$ car $B\cap E_k\subset B$. D'où $\nu(B)=0$. $\boxed{1 \text{ pt}}$

Exercice 3 (4 pts).
On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ donnée par

$$A=\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[n^3-\frac{1}{5^n},n^3+\frac{1}{5^n}\right]\right)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}).$$

1. Expliquer pourquoi A est un élément de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\lambda(A)=\frac{1}{2}$.

Solution
1. On sait que la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles fermés bornés, ainsi $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[n^3-\frac{1}{5^n},n^3+\frac{1}{5^n}\right]$ est un borélien comme réunion dénombrable de boréliens. De plus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est un borélien comme complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ qui est borélien. En définitive A est un borélien comme intersection de boréliens. $\boxed{2 \text{ pts}}$
2. Posons

$$A=B\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$$

où

$$B=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[n^3-\frac{1}{5^n},n^3+\frac{1}{5^n}\right].$$

On écrit B comme l'union disjointe

$$\begin{aligned}
B &= (B\cap\mathbb{Q})\cup(B\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))\\
&= (B\cap\mathbb{Q})\cup A.
\end{aligned}$$

Par additivité de λ,
$$\lambda(B) = \lambda(B \cap \mathbb{Q}) + \lambda(A).\boxed{0.5 \text{ pt}}$$
Comme $B \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$, par croissance de λ pour l'inclusion $\lambda(B \cap \mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0$, d'où
$$\lambda(B \cap \mathbb{Q}) = 0$$
et finalement
$$\lambda(B) = \lambda(A).\boxed{0.5\text{pt}}$$
On remarque que les intervalles $\left[n^3 - \frac{1}{5^n}, n^3 + \frac{1}{5^n}\right]$ sont deux à deux disjoints car n^3 est entier et $\frac{1}{5^n} < \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. $\boxed{0.5 \text{ pt}}$
On a donc par σ-additivité de λ
$$\lambda(B) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[n^3 - \frac{1}{5^n}, n^3 + \frac{1}{5^n}\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\left(\left[n^3 - \frac{1}{5^n}, n^3 + \frac{1}{5^n}\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{5^n} = \frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}.\boxed{0.5 \text{ pt}}$$
Ainsi
$$\lambda(A) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 (5 pts).
Soient E un ensemble et A une partie de E. On pose
$$\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{P}(E) : \ B \subset A \text{ ou } B^c \subset A\}.$$
1. Montrer que $\mathscr{F}$ est une tribu sur E.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On munit E de la tribu $\mathscr{F}$ et $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Montrer que si f est constante sur A^c alors f est mesurable.

Solution

Soient E un ensemble et A une partie de E.
1. Montrons que
$$\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{P}(E) : \ B \subset A \text{ ou } B^c \subset A\}.$$
est une tribu.

- E est bien élément de $\mathscr{F}$, car $E^c = \emptyset \subset A$. $\boxed{0.5 \text{ pt}}$
- $\mathscr{F}$ est stable par passage au complémentaire : si $B \in \mathscr{F}$ alors on a deux cas :
  - $B \subset A$ et donc $(B^c)^c = B \subset A$ et par suite $B^c \in \mathscr{F}$ car son complémentaire est inclus dans A.
  - $B^c \subset A$ et donc $B^c \in \mathscr{F}$ car il est inclus dans A.

  On a donc montré que dans les deux cas, $B^c \in \mathscr{F}$. $\boxed{1 \text{ pt}}$
- $\mathscr{F}$ est stable par réunion dénombrable : Si (B_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{F}$.
  - Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A$ alors $\bigcup_{n\geq 1} B_n \subset A$.
  - Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $B_{n_0}^c \subset A$ alors $\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)^c = \bigcap_{n\geq 1} B_n^c \subset B_{n_0}^c \subset A$.

  Donc dans tous les cas $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathscr{F}$. $\boxed{1 \text{ pt}}$

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application.
Supposons que f est constante sur A^c, i.e. $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A^c$, $f(x) = k$.
Montrons que f est mesurable de $(E, \mathscr{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a deux cas :

- Si $k \in B$ alors $(f^{-1}(B))^c \subset A$.
  En effet, si $x \in (f^{-1}(B))^c$ alors $f(x) \notin B$ ce qui implique que $f(x) \neq k$ donc forcément $x \in A$. $\boxed{1 \text{ pt}}$
- Si $k \notin B$ alors $f^{-1}(B) \subset A$. En effet, si $x \in f^{-1}(B)$ alors $f(x) \in B$ donc $f(x) \neq k$, ce qui implique que $x \in A$. $\boxed{1 \text{ pt}}$

Donc on vient de prouver que on a soit $f^{-1}(B) \subset A$ soit $(f^{-1}(B))^c \subset A$ i.e. $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$. D'où la mesurabilité de f. $\boxed{0.5 \text{ pt}}$

Exercice 5 (3 pts).
Soit $(E, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Montrer que g est mesurable.

Solution
On a

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon. \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in f^{-1}(\mathbb{Q}) \\ 0 & sinon. \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{f^{-1}(\mathbb{Q})}(x). \boxed{1 \text{ pt}} \end{aligned}$$

Or $\mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et f est mesurable donc $f^{-1}(\mathbb{Q}) \in \mathscr{F}$ $\boxed{1 \text{ pt}}$ et par suite $g = \mathbb{1}_{f^{-1}(\mathbb{Q})}$ est mesurable comme indicatrice d'un ensemble mesurable. $\boxed{1 \text{ pt}}$