Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
3ème année licence de mathématiques

A.U. 2023/2024

Controle continu: Espaces normés et analyse hilbertienne
Durée: 1h30

Exercice 1 (10 pts)
Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$,on définit

$$\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \; ; \; \|f\|_2 := |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad ; \quad \|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

1/ Vérifier que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ définissent des normes sur F.
2/ Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$sont équivalentes.
3/ Sont-elles équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$?
4/ Montrer que F est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_1$.
5/ Soit $(E, \|.\|_\infty)$ et $(F, \|.\|_1)$ deux espaces normés, on définit

$$\begin{array}{cccc} T & : & E \to F \\ f & \longmapsto & Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt \end{array}$$

Montrer que l'application T est linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 2 (05 pts)
Soit E un espace de Banach et $T : E \to l^\infty$ une application linéaire. Pour tout $n \geq 0$,on définit la forme linéaire continue

$$\begin{array}{ccc} f_n & : & l^\infty \to \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x_n \end{array}$$

Montrer que T est continue si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue de E dans $\mathbb{K}$.

Rappel: $l^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{K} \text{ tel que } \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n| < \infty \right\}$, la norme associée $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.

Exercice 3 (05 pts)
E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, T une application linéaire continue. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in X$.
1/ Montrer que l'image de T est fermée.
2/ Déterminer le $KerT$, T est elle injective?