Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire : 2023-2024**
Faculté des Sciences **Module : Équations différentielles**
Département de Mathématiques **Durée : 01h. 40min.**

Niveau : ***Troisième Année Licence Mathématiques***

CONTRÔLE CONTINU
07 DÉCEMBRE 2023

Exercice 1 (06 points).

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} - x^2(t) - \frac{1}{t^2}, \tag{1}$$

où $x(\cdot)$ est une fonction numérique de la variable réelle notée t avec $t > 0$.

1) Vérifier que la fonction x_p définie par
$$x_p(t) = \frac{1}{t}, \text{ pour tout } t > 0,$$
est une solution de l'équation différentielle (1).

2) Dire pourquoi le problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{t} - x^2(t) - \frac{1}{t^2}, \\ x(1) = 2, \end{cases} \tag{2}$$
admet une unique solution maximale.

3) On pose par définition
$$x(t) = u(t) + \frac{1}{t}, \text{ pour tout } t > 0.$$
Montrer que si x est une solution du problème de Cauchy (2), alors u est une solution du problème suivant
$$\begin{cases} u'(t) + \frac{u(t)}{t} = -u^2(t), \\ u(1) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

4) Déterminer explicitement la solution maximale du problème de Cauchy (3) ainsi que son intervalle d'existence.

Exercice 2 (10 points).

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^3\left(1 - x^2(t)\right)x(t)}{1+t^2}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $x(\cdot)$ est une fonction numérique de la variable réelle t avec $t \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Dire pourquoi pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy (4) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle $J =]-\alpha, \beta[$ avec α, $\beta \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.
2) Montrer que la fonction $t \mapsto x(t)$ est paire et que $\alpha = \beta$.
3) On suppose $x_0 = 1$. Quelle est alors la solution maximale de (4) ?
4) On suppose $x_0 > 1$.
4.1) Montrer que $\forall t \in J, x(t) > 1$.
4.2) En déduire que la fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement croissante pour $t \in J$ avec $t < 0$ et strictement décroissante pour $t \in J$ avec $t > 0$.
4.3) En déduire de la question précédente que $\forall t \in J, x(t) \leq x_0$.
4.4) En utilisant les questions 4.1) et 4.3), montrer que la solution est globale c'est-à-dire définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4.5) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.

Exercice 3 (04 points).

Soit $a \in]0, 1[$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$(5) \qquad \begin{cases} x'(t) = |x(t)|^a, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

où $x(\cdot)$ est une fonction numérique de la variable réelle t avec $t \in \mathbb{R}$.
1) Donner une solution évidente du problème de Cauchy (5).
2) Montrer que la fonction x définie par

$$x(t) = \begin{cases} ((1-a)t)^{\frac{1}{1-a}} \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ si } t < 0, \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3) Conclure.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

A. U. : 2023-2024

Module: Équations différentielles.

Niveau : Troisième Année Licence Mathématiques.

Corrigé du contrôle continu du Jeudi 07 décembre 2023.

Exercice 1 : 06 points.

1) Pour tout $t>0$, on a

$$x_p'(t) = -\frac{1}{t^2},$$

et

$$\frac{x_p(t)}{t} - x_p^2(t) - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}$$
$$= -\frac{1}{t^2}.$$

1 pt.

Alors,

$$x_p'(t) = \frac{x_p(t)}{t} - x_p^2(t) - \frac{1}{t^2}.$$

C'est-à-dire x_p est une solution de l'équation différentielle (1).

2) On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,x) \longmapsto f(t,x) = \frac{x}{t} - x^2 - \frac{1}{t^2}$$

2pts

La fonction f est de classe C^1, alors elle est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Par suite d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité de la solution maximale le problème de Cauchy (2) admet une unique solution maximale.

3) Pour tout $t>0$, on a

$$x'(t) = u'(t) - \frac{1}{t^2}.$$

Alors,

$$u'(t) = x'(t) + \frac{1}{t^2}$$
$$= \frac{x(t)}{t} - x^2(t) - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$
$$= \frac{u(t)}{t} + \frac{1}{t^2} - u^2(t) - \frac{2u(t)}{t} - \frac{1}{t^2}$$
$$= -\frac{u(t)}{t} - u^2(t).$$

0,75 pts

C'est-à-dire,

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = -u^2(t).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u(1) &= x(1) - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

0,25 pts

En conclusion u est une solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(t) + \dfrac{u(t)}{t} = -u^2(t), \quad t>0, \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

4)

On a,

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = -u^2(t). \qquad (*)$$

Comme $u \equiv 0$ n'est pas solution du problème de Cauchy (3) divisons les deux membres de $(*)$ par $u^2(t)$, on obtient

$$u^{-2}(t)\, u'(t) + \frac{u^{-1}(t)}{t} = -1.$$

On pose,

$$z(t) = u^{-1}(t).$$

Alors,

$$z'(t) = -u^{-2}(t)\, u'(t).$$

Ce qui donne,

$$-Z'(t) + \frac{Z(t)}{t} = -1$$

1 pt.

C'est-à-dire,

$$Z'(t) - \frac{Z(t)}{t} = 1.$$

Alors,

$$\frac{Z'(t)}{t} - \frac{Z(t)}{t^2} = \frac{1}{t}.$$

C'est-à-dire,

$$\left(\frac{Z(t)}{t}\right)' = \frac{1}{t}.$$

Ce qui donne,

$$\frac{Z(t)}{t} = \ln t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire,

$$Z(t) = t(\ln t + C).$$

Par suite,

$$u(t) = \frac{1}{t(\ln t + C)}.$$

0,75 pts

Comme $u(1) = 1$, on obtient $u(t) = \dfrac{1}{t(\ln t + 1)}$

Le domaine de définition de u est

$$D_u =]e^{-1}, +\infty[\quad \text{car } 1 \in D_u.$$ 0,25pts

Exercice 2 : 10 points.

1) On considère la fonction g définie par

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x) \longmapsto g(t,x) = \frac{t^3(1-x^2)x}{1+t^2}.$$

g est de classe C^1, alors elle est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Par suite pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy (4) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle $J =]-\alpha, \beta[$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ d'après le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz. 2pts

2) Montrons que la fonction $t \longmapsto x(t)$ est paire et que $\alpha = \beta$.

Pour cela, on considère la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = x(-t), \text{ pour tout } t \in J_1 =]-c, c[,$$ 0,25 pts

avec $c = \min(\alpha, \beta)$.

Pour tout $t \in J_1$, on a

$$\varphi'(t) = -x'(-t)$$

$$= -\frac{(-t)^3\left(1-(x(-t))^2\right)x(-t)}{1+(-t)^2}$$ 0,25 pts

$$= \frac{t^3\left(1-\varphi^2(t)\right)\varphi(t)}{1+t^2}$$

De plus,

$$\varphi(0) = x(-0) = x_0.$$ 0,25 pts

C'est-à-dire φ est une solution du problème de Cauchy (4).

Par suite, d'après la question précédente, on a

$$\forall t \in J_1, \quad \varphi(t) = x(t).$$ 0,25 pts

C'est-à-dire,

$$\forall t \in J_1, \quad x(-t) = x(t).$$

Montrons maintenant que $\alpha = \beta$.

Supposons par absurde que $\alpha < \beta$.

D'après le théorème de la sortie de tout compact, on a

$$\lim_{t \overset{<}{\to} \alpha} |\varphi(t)| = +\infty. \qquad (\mathcal{R}c)$$

Or

$$\lim_{t \overset{<}{\to} \alpha} \varphi(t) = \lim_{t \overset{<}{\to} \alpha} x(-t) \text{ car } \varphi(t) = x(-t)$$

$$= x(-\alpha) \text{ car } x \text{ est continue au point } t = -\alpha \text{ (vu que } x \text{ est définie et continue sur }]-\alpha, \beta[\text{ et } \beta > \alpha)$$

ce qui est en contradiction avec $(\mathcal{R}c)$. Par suite $\alpha = \beta$.

Conclusion : x est paire et définie sur $]-\alpha, \alpha[$,

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

1 pt.

3)

$x \equiv 1$ est une solution du problème de Cauchy

$$(Ch1) \quad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^3(1-x^2(t))x(t)}{1+t^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

1pt.

Alors par unicité c'st l'unique solution du problème de Cauchy (Ch1).

4)

On suppose $x_0 > 1$.

4.1) Montrons que $\forall t \in J =]-\alpha, \alpha[$, $x(t) > 1$.

Supposons par absurde qu'il existe $t_* \in J$ tel que $x(t_*) = 1$.

On considère le problème de Cauchy

$$(Ch2) \quad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^3(1-x^2(t))x(t)}{1+t^2} \\ x(t_*) = 1. \end{cases}$$

1pt.

Le problème de Cauchy (Ch2) admet deux solutions la fonction $t \longmapsto x(t)$ et la fonction $x \equiv 1$. Contradiction car le problème de Cauchy (Ch2) admet une unique solution.

Par suite, $\forall t \in J$, $x(t) > 1$.

4.2)

On a,

$$\forall t \in J, \quad x'(t) = \frac{t^3 (1 - x^2(t))\, x(t)}{1 + t^2}$$

Comme $\forall t \in J,\ x(t) > 1$, on obtient

$\forall t \in J,\ x'(t) > 0$, pour tout $t < 0$,

et $\forall t \in J,\ x'(t) < 0$, pour tout $t > 0$.

1pt

C'est-à-dire la fonction $t \longmapsto x(t)$ est strictement croissante pour tout $t \in J$ avec $t<0$, et strictement décroissante pour tout $t \in J$ avec $t > 0$.

4.3) D'après la question précédente, on a

$$\forall t \in J, \quad x(t) \leq x(0).$$

0,5 pts

C'est-à-dire,

$$\forall t \in J, \quad x(t) \leq x_0.$$

4.4) D'aprés les questions 4.1) et 4.3), on a

$$\forall t \in J =]-\alpha, \alpha[, \quad 1 < x(t) \leq x_0.$$

Si $\alpha < +\infty$, alors d'aprés le théorème de sortie de tout compact, on a $\lim\limits_{t \overset{<}{\to} \alpha} x(t) = +\infty$, ce qui est absurde car la fonction $t \mapsto x(t)$ est bornée.

1 pt.

4.5) Comme la fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante pour tout $t>0$ et minorée, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \ell$, avec $1 \leq \ell < x_0$.

0,5 pts

Supposons par absurde que $\ell > 1$, alors comme

$$\forall t > 0, \quad x'(t) = \frac{t^3(1 - x^2(t))\,x(t)}{1+t^2},$$

0,5 pts

on a $\lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = -\infty$.

Maintenant, comme

$$\forall t > 0, \quad x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s)\,ds,$$

et $\forall t > 0$, avec $t > t_1$, on a $x'(t) < -1$, pour tout $t > t_1$ (car $\lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = -\infty$), on obtient,

$$\forall t > t_1, \quad x(t) \leq x_0 + \int_0^{t_1} x'(s)\,ds + \int_{t_1}^{t} -ds$$

$$= x_0 + \int_0^{t_1} x'(s)\,ds + t_1 - t$$

$$\leq x_0 + t_1 - t \quad \text{car } x'(s) < 0, \text{ pour } s > 0.$$

c'est-à-dire,

$$\forall t > t_1, \quad x(t) \leq x_0 + t_1 - t.$$

Ce qui entraîne que,

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = -\infty.$$

0,5 pts

Contradiction car on a supposé $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \ell > 1$.

Par suite $\ell = 1$.

Exercice 3 : 04 points.

1) $x \equiv 0$ est une solution évidente du problème de Cauchy (5).

1 pt.

2) Montrons que la fonction x définie par

$$x(t) = \begin{cases} ((1-a)t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.

Cas 1 : Pour $t>0$, on a $t \longmapsto x(t)$ est dérivable

et $t \longmapsto x'(t) = ((1-a)t)^{\frac{1}{1-a}-1} = ((1-a)t)^{\frac{a}{1-a}}$. 0,5 pts

Cas 2 : Pour $t<0$, on a $t \longmapsto x(t)$ est dérivable

et $t \longmapsto x'(t) = 0$. 0,5 pts

Cas 3 : Si $t=0$, il faut utiliser la définition de la dérivée d'une fonction en un point.

On a,

$$\lim_{t \overset{<}{\to} 0} \frac{x(t)-0}{t-0} = \lim_{t \overset{<}{\to} 0} \frac{0}{t} = 0,$$ 0,5 pts

et

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{x(t)-x(0)}{t-0} = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{((1-a)t)^{\frac{1}{1-a}}}{t}$$

$$= \lim_{t \overset{>}{\to} 0} (1-a)^{\frac{1}{1-a}} t^{\frac{a}{1-a}}$$ 0,5 pts

$$= 0.$$

Par suite, x est dérivable au point $t=0$ et on a $x'(0)=0$. 0,25 pts

En conclusion d'après les cas 1, 2 et 3, il résulte que la fonction $t \longmapsto x(t)$ est dérivable et de plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = |x(t)|^{a}.$$

0,25 pts

3) Le problème de Cauchy (5) admet deux solution la fonction identiquement nulle et la fonction définie dans la question 2). Par suite le problème de Cauchy (5) n'admet pas une unique solution (voir pour cet exercice la fonction $x \longmapsto |x|^{a}$ n'est pas localement lipschitzienne). 0,5 pts