Département de mathématiques 2023/2024

Module: Optimisation sans contraintes

Contrôle continu de remplacement

Exercice 1 sur 8 points

On considère le problème d'optimisation (P) suivant:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} 2x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1 - 4x_3,$$

1. Ce problème admet-il une solution?
2. Etudier la convexité du problème.
3. Résoudre (P)

Solution

1. **Sur 3 points**

On pose $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1 - 4x_3$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

On a

$$x_1x_3 \geq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$5x_1 + 4x_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \sqrt{34}\,\|x\|$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 2x_1^2 + -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - \sqrt{34}\,\|x\| \\ &\geq \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - \sqrt{34}\,\|x\| \geq \|x\|^2 - \sqrt{34}\,\|x\|. \end{aligned}$$

Comme la fonction $g(t) = t^2 - \sqrt{34}t \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, alors

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est donc coercive, elle admet un minimum global.

2. **Sur 3 points**

La fonction f est une fonction polynomiale de classe C^2.

le gradient de f :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_3 - 5 \\ 2x_2 \\ x_1 + 4x_3 - 4 \end{pmatrix}$$

Le hessien est

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice hessienne $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 5$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, la matrice hessienne est définie positive, par suite f est strictement convexe.

3. **Sur 2 points**
L'unique solution de l'équation d'Euler, $\nabla f(x) = 0$, est $\left(x_1 = \frac{16}{15}, x_2 = 0, x_3 = \frac{11}{15}\right)^T$ est le minimum global.

Exercice 2 sur 6points
1. Montrer que si $J(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle + c$ où A est une matrice $n \times n$ symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ alors J est coercive si et seulement si A est définie positive.
2. Soit f une fonction différentiable sur un domaine convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.
Pour tout $x, y \in C$, en utilisant la définition de la convexité et de la dérivée directionnelle montrer que

$$\forall x, y \in C, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle \tag{1}$$

Solution
1. **Sur 2 points**
Supposons que A est définie positive nous savons que si A est une matrice symétrique alors

$$\langle x, Ax\rangle \geq \lambda_{\min} \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $\lambda_{\min} > 0$ est la plus petite valeur propre de A. De plus

$$|\langle b, x\rangle| \leq \|b\| \|x\|$$

alors

$$-\langle b, x\rangle \geq -\|b\| \|x\|$$

en conséquence

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle + c \\ &\geq \frac{1}{2}\lambda_{\min} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| + c \to +\infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty \end{aligned}$$

et par suite J est coercive.
Sur 2 points
Maintenant montrons que si J est coercive alors A est définie positive.
Par l'absurde supposons que A n'est pas définie positive. ce qui veut dire que $\lambda_{\min} \leq 0$. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{\min}$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, et $J(\alpha v) = \frac{1}{2}\langle \alpha v, A\alpha v\rangle - \langle b, \alpha v\rangle + c = \frac{1}{2}\alpha^2\lambda_{\min} \|v\|^2 - \alpha \langle b, v\rangle + c \to -\infty$ quand $\|\alpha v\| \to +\infty$ ce qui contredit la coercivité de J.
Si $\lambda_{\min} = 0$ alors $J(\alpha v) = -\alpha \langle b, v\rangle + c \to -\infty$ quand $\alpha \to sign(\langle b, v\rangle)\mathbb{R}$ ce qui contredit la coercivité de J.
Donc A est définie positive.
2.**Sur 2 points**
Soit f convexe, on considère $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in C$.
Comme C est convexe $y + \lambda(x - y) \in C$ et puisque f est convexe

$$f(y + \lambda(x - y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

ce qui implique

$$f(x) - f(y) \geq \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda}$$

En faisant tendre λ vers 0 on obtient

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(x), x - y \rangle$$

Exercice 3 sur 6 points
Trouver les points critiques de la fonction

$$f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right) e^{x^2+y^2}.$$

puis discuter leur nature.
Solution
Sur 2 points
Le gradient de la fonction f est:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+1\right) \\ 2ye^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+2\right) \end{pmatrix}$$

L'équation d'Euler $\nabla f(x,y) = 0$ a pour solution $(0,0)$, en effet

$$\begin{cases} 2xe^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+1\right) = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

car $e^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+2\right) > 0$ et $e^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+1\right) > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Sur 2 points
La matrice hesseinne de f est:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2}\left(2x^4+4x^2y^2+5x^2+2y^2+1\right) & 4xye^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+3\right) \\ 4xye^{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+3\right) & 2e^{x^2+y^2}\left(2x^2y^2+x^2+4y^4+10y^2+2\right) \end{pmatrix}$$

au point $(0,0)$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que la matrice est définie positive le point $(0,0)$ est un minimum local.
Sur 2 points
est-il global?
On constate que la fonction

$$f(x,y) = \left(x^2+2y^2\right)e^{x^2+y^2} = \left(x^2+y^2\right)e^{x^2+y^2} + y^2 e^{x^2+y^2} \geq \left(x^2+y^2\right)e^{x^2+y^2}$$

on pose

$$g(t) = t^2 e^{t^2},$$

on a

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty.$$

La fonction f est continue et coercive, elle admet un minumum global c'est $(0,0)$.