Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 2ème année MATH, 2023–2024

Analyse4

Fiche de TD 4 : Intégrales doubles et triples.

Exercice 1. Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1) $\displaystyle\iint_D xy^2dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y\geq 1 \quad \text{et} \quad x^2+y^2\leq 1\}$

2) $\displaystyle\iint_D x\sin(x+y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}, \quad -x\leq y\leq x\}.$

3) $\displaystyle\iint_D (x+2y)^2dxdy \qquad D$: un triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$ et $C(2,-1)$.

4) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, y\geq 0, \quad 1\leq x+y\leq 2\}.$

5) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x\leq 1, \quad 0\leq y\leq 1, \quad x^2+y^2\geq 1\}.$

Exercice 2. En utilisant les coordonnées polaires, calculer les intégrales suivantes

$$1)\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \qquad 2)\int_0^6\int_0^y xdxdy,$$

$$3)\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy, \quad \text{où} \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad 0\leq x\leq 2, \quad y\geq 0, \quad (x-1)^2+y^2\leq 1\},$$

$$4)\iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha>0, \quad \text{où} \quad D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$$

$$5)\iint_D xy\sqrt{x^2+4y^2}dxdy, \quad \text{où} \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, y\geq 0, \quad x^2+y^2\leq 1\}$$

Exercice 3. 1) Représenter le domaine

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad x>0, \quad y>0, \quad \frac{1}{2}<x+y<1\}.$$

2) On considère le C^1- difféomorphisme suivant

$$\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (u,v)\mapsto(x,y)=(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v))\end{cases}$$

Montrer que le domaine correspondant à D pour les coordonnées (u,v) est

$$\Delta=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{2}<u<1, \quad -u<v<u\}.$$

3) Calculer

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales triples suivantes

1) $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)^2 dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1\}$.

2) $\displaystyle\iiint_D x^2 y dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq y \leq 1-x^2, |x+y+z| \leq 1\}$.

3) $\displaystyle\iiint_D xyz dxdydz$ avec le quart positif de la boule de centre 0 et de rayon 1 .

Exercice 5. 1) En utilisant les coordonnées cylindriques , calculer

$$a) \iiint_D |xyz| dxdydz \quad \text{avec} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2\}$$

$$b) \iiint_D \frac{x^2}{x^2+y^2} dxdydz, \quad \text{où} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$$

2) En utilisant les coordonnées sphériques, calculer

$$a) \iiint_D (x^2+y^2+z^2) dxdydz \quad \text{avec D la sphère de centre 0 et de rayon R.}$$

$$b) \iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} dxdydz,$$

où D est le domaine intérieur à la sphère unité et extérieur au cône de révolution de sommet $(0,0,0)$, d'axe de révolution (oz) et de demi-angle $\frac{\pi}{3}$

Exercice 6. 1)Calculer l'aire du domaine D défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad \text{et} \quad y \geq |x|\}$$

2) Calculer le volume du trièdre suivant

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad x+y+z \leq 1\}.$$

Exercice 7. 1) Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad a,b,c > 0.$$

2) Calculer le volume de

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \geq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

Exercice 8. Calculer les intégrales curvilignes suivantes

$$1) \int_\gamma (x+y)dx + (x-y)dy, \quad \text{où} \quad \gamma \quad \text{est le cercle unité dans le sens positif.}$$

$$2) \int_\gamma xydx + (x+y)dy, \quad \text{où} \quad \gamma \quad \text{est le cercle unité dans le sens positif.}$$

$$3) \int_{\gamma_i} y^2dx - x^2dy, \quad i = 1,2$$

où γ_1 est le segment de droite d'origine $A(1,0)$ et d'extrémité $B(0,1)$.
γ_2 est l'arc de cercle de centre $(0,0)$ de rayon 1, d'origine $A(1,0)$ et d'extrémité $B(0,1)$.

$$4) \int_\gamma (x^2-y^2)dx + 2xydy, \quad \text{où} \quad \gamma \quad \text{est le cercle du centre (1,2) et de rayon 1.}$$