Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Licence 2ème année MATH, 2023–2024

Analyse4
Fiche de TD 3 : Fonctions de plusieurs variables2.

Exercice 1. I) Calculer la matrice jacobienne et en déduire leurs jacobien des applications suivantes

$$1) f(x,y,z) = (x + y^2 + z, xy^2z, x^2z + xy)$$

$$2) f(r,\theta,\varphi) = (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$

II) Soient $f(x,y,z) = (x + y^2, xy^2z)$ et $g(u,v) = (u^2 + v, uv, e^v)$.
Calculer la matrice jacobienne de f, de g, de fog et de gof.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x,y) = (\cos(x) + \sin(y), -\sin(x) + \cos(y), 2\sin(x)\cos(y)).$$

Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).
2) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w.$$

Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).
3) Calculer de deux manières différentes la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(g \circ f)$ de $g \circ f$ au point (x,y).

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x + \frac{1}{1+y^2}, y + \frac{1}{1+x^2}).$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \varphi(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$.
3) Montrer que f est localement inversible au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$f(x,y) = (\sin(\frac{y}{2}) - x, \sin(\frac{x}{2}) - y).$$

1) Justifier que f est de classe C^1 et montrer que $df(x,y)$ est inversible.
2) Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.
3) Calculer $J_{f^{-1}}(x,y)$, où $(x,y) = (1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi)$.

Exercice 5. 1) Montrer que l'équation

$$-\sin(y) + x + \cos(xy) = 0$$

définit localement y comme une fonction de x au voisinage du point $(1,0)$.
2) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de y au point -1.

Exercice 6. On considère l'équation

$$z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0.$$

1) Trouver toutes les solutions du type $(0,0,z)$.
2) Montrer que l'équation définit localement z comme une fonction $z = \varphi(x,y)$ au voisinage de $(0,0,1)$.
3) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de φ en 0.

Exercice 7. 1) Montrer que les deux équations

$$\begin{cases} x - u^2 + v^2 = 0 \\ y - uv + 1 = 0 \end{cases},$$

définissent au voisinage du point $(0,0)$ deux fonctions implicites $u = \varphi_1(x,y)$ et $v = \varphi_2(x,y)$ telle que $\varphi_1(0,0) = 1$ et $\varphi_2(0,0) = 1$.
2) En déduire l'équation du plan tangent à chacune des deux surfaces.

Exercice 8. I) Donner le développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes aux points indiqués

$$1) f(x,y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}, \quad (2,0), \quad 2) f(x,y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}, \quad (0,0).$$

II) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy} - 2e^2 xy$.
1) Calculer pour tout vecteur $v = (h,k)$, $df(2,1)v$ et $d^2f(2,1)(v,v)$.
2) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au point $(2,1)$.

Exercice 9. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques et étudier leurs nature

$$1) f(x,y) = x^4 + 2x^2 + y^2 - 2y, \quad 2) f(x,y) = x(3 - 4x^2 - 3y^2), \quad 3) f(x,y) = y^2 + xy\ln(x),$$

$$4) f(x,y,z) = xy + yz + zx + \frac{x^4}{2}, \quad 5) f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1.$$

Exercice 10. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3} + xy$$

1) Donner le développement limité de f en $(0,0)$ à l'ordre 2.
2) Trouver les points critiques de f.
3) Déterminer la nature des points critiques.
4) La fonction f a-t-elle un minimum ou un maximum global ?

Exercice 11. On considère l'équation

$$x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z) = 0. \qquad (1)$$

1) Montrer que l'équation (1) définie une fonction unique $z = \varphi(x,y)$ au voisinage de $(0,0,0)$.
2) Montrer que $(0,0)$ est un point critique pour φ et en déduire sa nature.

Exercice 12. Calculer le maximum et le minimum de f sous la contrainte indiquée

$$1) f(x,y) = xy \quad \text{sous la contrainte} \quad x + y - 6 = 0.$$

$$2) f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{sous la contrainte} \quad xy = 9.$$

$$3) f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{sous la contrainte} \quad x + y + z = 12.$$