Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 2ème année MATH, 2023–2024

Analyse4
Fiche de TD 2 : Fonctions de plusieurs variables1.

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données

$$1)f(x,y)=\ln(8-x-y),\qquad 2)\ f(x,y)=\sqrt{4x-x^2+4y-y^2},\qquad 3)\ f(x,y)=\frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}},$$

$$4)f(x,y)=\ln(x^2+y^2-x)\ ,\qquad 5)f(x,y,z)=\arcsin(\sqrt{\frac{x}{2}}+\arccos(|y|)+\arcsin(\sqrt{z-1})).$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes, si elles existent

$$1)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2},\qquad 2)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)},\qquad 3)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2},$$

$$4)\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x\ln(y)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}},\qquad 5)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2},\qquad 6)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{xy^2}.$$

Exercice 3. Etudier la continuité des fonctions suivantes

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xy\sqrt{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si}\ \ (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0 & \text{si}\ \ (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}\qquad 2)f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2-xy} & \text{si}\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si}\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Exercice 4. Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions suivantes ?

$$1)f(x,y)=\frac{\sin(2x-2y)}{x-y},\qquad 2)f(x,y)=\frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

Exercice 5. 1) Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y)=(x-1)\sqrt[3]{x-y}$ au point $(1,1)$ dans le sens du vecteur $v=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.
Même question pour $f(x,y,z)=ze^x\cos(\pi y)$ au point $(0,-1,1)$ dans le sens du vecteur $v=(-1,2,1)$.
2) Calculer le gradient de la fonction

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sin(y+2z)$$

au point $(2,0,0)$.
3) Soient $D:=\{(x,y\in\mathbb{R}^2,\quad x>0\}$ et $f:D\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\arctan(\frac{y}{x})$.
Trouver la région V telle que

$$\forall(x,y)\in V,\quad \|\nabla f(x,y)\|_2<1,\quad \text{où}\quad \|.\|_2\quad \text{est la norme euclidienne.}$$

Exercice 6. I) Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$1) f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \frac{x^3}{y}, \qquad 2) f(x,y) = x^2 e^{xy}, \quad 3) f(x,y) = \ln(x^2 + y), \qquad 4) \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

II) Calculer la dérivée de la fonction $F(t) = f(x(t), y(t))$ (ou $f(x(t), y(t), z(t))$) lorsque

$$1) f(x,y) = \cos(x + 4y^2) \quad \text{avec} \quad x(t) = 5t^4 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{t}.$$

$$2) f(x,y,z) = xyz \quad \text{avec} \quad x(t) = t^2 + 1, \quad y(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad z(t) = \tan(t).$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Est-elle continue dans $\mathbb{R}^2$?
2) Est-elle dérivable dans $\mathbb{R}^2$?
3) Est-elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$?
4) Est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8. Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad 2) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|-y} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 9. On rappelle que si f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, son laplacien est définit par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

En faisant le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$, on définit $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
1) Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ et en déduire que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) := g_1(r,\theta),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) := g_2(r,\theta)).$$

2) Calculer les dérivées partielles de g_1, g_2 par rapport à r, θ et en déduire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
3) Donner l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 10. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad \forall t > 0.$
1) Quelles sont les homogènes, en précisant le degré, parmi les fonctions

$$1) f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}, \quad 2) f(x,y,z) = 2x^2 - 3yz, \quad 3) f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

2) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, exprimer $g'(t)$ en fonctions des dérivées partielles de f où $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $g(t) = f(at, bt)$.
3) Etablir la relation d'Euler suivante

$$f \quad \text{est homogène de degré} \quad \alpha \Leftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$