Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 2ème année MATH, 2023–2024

Analyse4

Fiche de TD 1 : Rappels de topologie de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(X) = N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que N et $\|.\|_2$ sont des normes équivalentes.
3) Représenter graphiquement la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$.

Exercice 2. Soit N la norme définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3|.$$

N est-elle une norme ? Si oui, montrer qu'elle est équivalente à des normes usuelles.

Exercice 3. On muni $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Trouver par un calcul direct un nombre m, tel que pour tout vecteur x, $\|Ax\|_\infty \leq m\|x\|_\infty$.
2) Trouver un vecteur x, de norme 1, pour lequel l'inégalité précédente est une égalité.
3) On définit la norme matricielle par

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

En déduire $|||A|||$.

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante vérifiant

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

1) Pour une distance donnée d, montrer que $\varphi \circ d$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que $d_1 = \frac{d}{1+d}$ et $d_2 = \ln(1 + d)$ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites réelles, $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \{(x_n)_n, \quad (x_n)_n \quad \text{une suite réelle}\}$.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On pose

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1}.$$

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
2) Montrer que $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, d)$ est borné.

Exercice 6. (Facultatif)

Soient $a_1, .., a_p$, p éléments de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $E = \{a_1, ..., a_p\}$ est compact.

2) En déduire que $E = \{(1, [\sin(x)]), \quad x \in \mathbb{R}\}$ est compact.

Exercice 7. (Facultatif)

Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Pour $s > 0$ fixé, étudier la variation de la fonction $\varphi(t) = \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} - st$ sur $]0, +\infty[$.

2) En déduire que pour tout $s, t \in]0, +\infty[$, on a

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}.$$

3) Soient $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

En posant

$$s = \frac{|x_k|}{(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}}, \quad t = \frac{|y_k|}{(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}},$$

montrer l'inégalité de Hölder suivante

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

4) Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

5) En déduire l'inégalité de Minkowski suivante

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Exercice 8. (Facultatif)

Soit d une distance sur $\mathbb{R}^n$.

1) On pose $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$.

Montrer que d' est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante qui vérifie

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(a + b) \leq f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

a) On pose $\triangle(x, y) = f(d(x, y))$.

Montrer que $\triangle$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire que si on pose

$$d''(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

alors d'' est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

c) Si $n = 1$ et $d(x, y) = |x - y|$, alors déterminer la boule $B_{d''}(0, a)$ pour un $a > 0$.