Université Aboubekr Belkaid Tlemcen — **AU : 2023/2024**

Faculté des Sciences — **Durée: 1h30mn**

Département de Mathématiques

L2 - Maths

Rattrapage d'Analyse Numérique 2

EXERCICE 1 : (12 pts) Soit le système linéaire $(S) : A.\underline{x} = \underline{b}$

I. On prend dans un premier temps

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En appliquant la méthode de Gauss avec pivotation partielle pour résoudre ce système, expliciter les matrices obtenues à chaque étape puis donner le vecteur solution du système (S).

II. On suppose maintenant que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Et on cherche à résoudre le système (S) par une méthode itérative.

1. La méthode itérative de Gauss-Seidel appliquée à cette exemple est-elle convergente ? Justifier votre réponse.
2. La méthode itérative de Jacobi appliquée à cette exemple est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

III. Dans le cas d'une convergence

1. Ecrire les composantes du vecteur $\underline{x^{(k+1)}}$ à l'itération k+1.
2. En prenant $\underline{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\varepsilon = 10^{-2}$, résoudre le système (S).

EXERCICE 2 : (8 pts) Soit l'équation différentielle du 1er ordre avec condition initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = -xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{où,} \quad ' = \frac{d}{dx} \qquad x \in [0, 1].$$

.../...

Que l'on cherche à résoudre numériquement, en effectuant le calcul avec 5 décimales, en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2, en prenant un pas $h = 0.1$

1. Déterminer la solution exacte $y_{ex}(x)$ de cette équation différentielle et calculer $y_{ex}(0.2)$.
2. Ecrire et appliquer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 pour déterminer la valeur approchée de $y(0.2)$.
3. Calculer l'erreur commise.

-Bonne chance -

Corrigé du Rattrapage
d'Analyse Numérique 2

2023/2024

Exercice 1

I - Méthode de Gauss avec pivotation partielle
Soit la matrice augmentée :

$$[A|b]^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

* Permutation de la 1ère et la 2ème ligne :

$$[A|b]_p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ 01

* 1ère itération de Gauss :

$$[A|b]_p^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ 01

* 2ème itération de Gauss :

$$[A|b]^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & 0 \end{bmatrix}$$ 01

→ Résolution du système (S) :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y - z = -2 \\ \frac{7}{4} z = 0 \end{cases}$$ 01

→ Solution de (S) : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (1 \ -1 \ 0)^t$.

II -

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(0,25) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (0,25) $E = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; (0,25) $F = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* Matrice de Gauss-Seidel :

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(0,5) (0,5) (0,5)

$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \lambda(2-\lambda)^2 = 0$ (0,25)

$\lambda = 2$ v.p double (0,25)

$\rho(\mathcal{L}_1) = 2$ (0,25) Alors la méthode de G-S diverge (0,5)

* Matrice de Jacobi :

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(0,5) (0,5) (0,5)

$\det(J - \lambda I) = -\lambda^3 = 0$ (0,25) $\lambda = 0$ v.p simple (0,25)

$\rho(J) = 0 < 1$ (0,25) Alors la méthode de Jacobi converge (0,5)

III - Le $(k+1)^{\text{ième}}$ itération de Jacobi.

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -2y^{(k)} + 2z^{(k)} - 1 \\ y^{(k+1)} = -x^{(k)} - z^{(k)} + 2 \\ z^{(k+1)} = -2x^{(k)} - 2y^{(k)} + 3 \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

(01)

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	0	1	3	1	1
$y^{(k)}$	0	1	-2	0	0
$z^{(k)}$	1	3	-1	1	1

(01)

* La solution de (S) est :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (1 \ 0 \ 1)^t$$ (0,25)

Exercice 2

$x \in [0,1]$

$$(P) \begin{cases} y'(x) = -x y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

① La solution exacte de (P) :

$$y_{ex}(x) = \frac{2}{x^2 + c} \quad , \quad c \in \mathbb{R} \text{ ----- } 01$$

$$y(0) = 1 \iff c = 2$$

$$y_{ex}(x) = \frac{2}{x^2+2} \quad ; \quad y_{ex}(0,2) = \frac{2}{(0,2)^2+2} = 0.98 \quad 01$$

② * Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = h\, f(x_i, y_i) \\ k_2 = h\, f(x_i + h, y_i + k_1) \end{cases} \quad i = 0, 1 \text{ -- } 01,5$$

$h = 0.1$

$f(x,y) = -x y^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$;

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \boxed{0.995} \text{ ---- } 0,5$$

où, $k_1 = 0.1\, f(0, 1) = 0$ ---- 0,5

$k_2 = 0.1\, f(0.1, 1) = -0.01$ --- 0,5

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \boxed{0.931} \text{ --- } 0,5$$

où, $k_1 = -0.0099 = 0.1\, f(0.1, 0.995)$ 0,5

$k_2 = -0.1164 = 0.1\, f(1.2, 0.985)$ 0,5

$$y(0.2) \simeq \boxed{y_2 = 0.931} \text{ ---- } 0,5$$

③ L'erreur commise :

$$E = y_{ex}(0,2) - y_2 = 0.98 - 0.931 = \boxed{0.049} \quad 01$$