Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 2

Examen de rattrapage : Analyse 4

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4.5 Pts)
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x,y) = g(x,y) + e^x - 2y - 1.$$

1) Quelles sont les conditions sur g pour que le théorème des fonctions implicites s'applique au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ qui sastisfait $f(x,y) = 0$?
2) Soit $g(x,y) = \arctan(x+y)$. Montrer qu'il existe une fonction de classe C^1 telle que $f(x,\varphi(x)) = 0$ au voisinage de $(0,0)$.
3) En déduire l'équation de la tangente à la courbe φ au point 0.

Exercice 2. (5 Pts)
Soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\sin\left(\frac{x}{x-y}\right) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1) Donner D_f le domaine de définition de f et étudier la continuité de f au point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}$.
2) Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (x,y) pour $x \neq y$ de $\mathbb{R}^2$.
3) Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}^*$.
4) Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 3. (4 Pts)
Trouver les points critiques de f et déterminer leur nature :

$$f(x,y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}, \quad \text{où} \quad x > -1, \quad y > -1.$$

Exercice 4. (6.5 Pts)
Soit D le domaine délimité par le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3 et le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1.
1) Tracer le domaine D.
2) Calculer l'aire du domaine D.
3) Calculer

$$I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy.$$

4) En déduire l'intégrale triple suivante

$$J = \iiint_\Delta (a^z + x^2 + y^2)dxdydz,$$

où $a > 0$ et $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 1\}$.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2023/2024

جامعة أبو بكر بلقايد
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵏ ⴱⵓⴱⴰⴽⵔ ⴱⴻⵍⵇⴰⵢⴻⴷ
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$2^{ème}$ année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 4

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4.5 Pts)

1) Pour appliquer le théorème des fonctions implicites en (a,b), qui satisfait $f(x,y)=0$, on doit
$i) f$ de classe C^1 au voisinage de (a,b) càd, g de classe C^1 au voisinage de (a,b). **(0.5 Pt)**
$ii) f(a,b)=0 \Leftrightarrow g(a,b)=2b-e^a+1$ **(0.5 Pt)**
$iii)$ Sachant que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)-2$, alors on doit avoir $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)-2\neq 0$ càd $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 2$. **(0.5 Pt)**

2) Soit $g(x,y)=\arctan(x+y)$. On remarque qu'au voisinage de $(0,0)$, on a $\arctan(x+y)$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec $g(0,0)=0$. **(0.25 Pt)** De plus,
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+(x+y)^2}$, donc, $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=1\neq 2$. **(0.5 Pt)**
Donc, le TFI implique l'existence de deux intervalles ouverts I et J telle que $0\in I$ et $0\in J$ et une fonction $\varphi: I\to J$ de classe C^1 vérifiant $\varphi(0)=0$ et $f(x,\varphi(x))=0,\quad \forall x\in I$. **(0.5 Pt)**
3) On sait que l'équation du plan tangent à la courbe φ en 0 est

$$y=\varphi(0)+x\varphi'(0). \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

On remarque que

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+(x+y)^2}+e^x$ **(0.25 Pt)** et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+(x+y)^2}-2$, **(0.25 Pt)** alors $\varphi'(x)=2$. Donc, $y=2x$. **(0.25 Pt)**

Exercice 2. (5 Pts)

1) Le domaine de définition de f est $D_f=\mathbb{R}^2$ puisque la fonction f est bien définie $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. **(0.5 Pt)**
La continuité de f au point (a,a) pour $a\in\mathbb{R}$.
On remarque que

$$|f(x,y)-f(a,a)|=|(x^2-y^2)\sin(\frac{x}{x-y})|\leq |x^2-y^2|\to 0 \quad \text{quand} \quad (x,y)\to(a,a).$$

Donc, f est continue en (a,a). **(0.5 Pt)**
2) Les dérivées partielles premières de pour (x,y) avec $x\neq y$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin(\frac{x}{x-y})-y(\frac{x+y}{x-y})\cos(\frac{x}{x-y}) \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y\sin(\frac{x}{x-y})+(\frac{x+y}{x-y})\cos(\frac{x}{x-y}) \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

3) Les dérivées partielles premières en tout point (a,a) pour $a\in\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,a)-f(a,a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((a+h)^2-a^2)\sin(\frac{a+h}{h})}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)\sin(\frac{a+h}{h}),$$

or cette limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point (a,a) pour $a \neq 0$. **(1 Pt)**
Maintenant, par rapport à y, on a

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a,a+k)-f(a,a)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(a^2-(a+k)^2)\sin(\frac{a}{k})}{-k}$$
$$= \lim_{k\to 0}(2a+k)\sin(\frac{a}{k}).$$

Même chose, cette limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable par rapport à y au point (a,a) pour $a \neq 0$. **(1 Pt)**
4) La différentiabilité de f en $(0,0)$.
On remarque que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{h}{h})}{h} = 0,$$

et

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0}(-k)\sin(\frac{0}{-k}) = 0.$$

Donc, f est différentiable en $(0,0)$. **(1 Pt)**

Exercice 3. (4 Pts)
On a $f(x,y) = x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$. Les points critiques de f sont donnés par

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+y}+\frac{y}{2\sqrt{1+x}} = 0 \\ \frac{x}{2\sqrt{1+y}}+\sqrt{1+x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}+y = 0 \\ x+2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

Donc, le seul point critique est $(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$. **(2 Pts)**
La nature :
On remarque que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{4}\frac{1}{(1+x)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x}{4}\frac{1}{(1+y)^{3/2}}$$

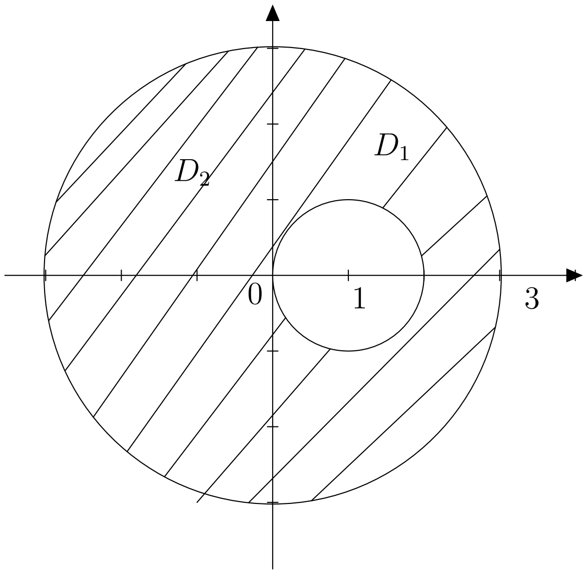
$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+y}}.$$

Ainsi,

$$Hess_f(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Puisque le $det \quad Hess_f(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}) < 0$, alors $(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ est un point selle. **(2 Pts)**

Exercice 4. (6.5 Pts)
1) Le domaine D est : **(0.5 Pt)**



2) L'aire du domaine D est donné par

$$Aire(D) = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

En utilisant les coordonnées polaires, on obtient

$$Aire(D) = \iint_{D'_1} rdrd\theta + \iint_{D'_2} rdrd\theta \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

avec

$$D'_1 = \{(r, \theta)/ \quad 0 \leq r \leq 3, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}, \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$D'_2 = \{(r, \theta)/ \quad 2\cos(\theta) \leq r \leq 3, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc,

$$Aire(D'_1) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\int_0^3 rdr)d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 (\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \frac{9\pi}{2}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$Aire(D'_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos(\theta)}^{3} ddrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos(\theta)}^{3} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (9 - 4\cos^2(\theta))d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (9 - 2(1 + \cos(2\theta)))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[7\theta - \sin(2\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{2}. \quad (\mathbf{0.75Pt})$$

Ainsi,

$$Aire(D) = \frac{9\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 8\pi. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

3) On a

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Alors,

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy = (\int_0^3 r^3)(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta) = \frac{81\pi}{4}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

$$\iint_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos(\theta)}^{3} r^3 drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{81 - 16\cos^4(\theta)}{4} \right) d\theta.$$

D'autre part, on remarque que

$$\cos^4(\theta) = \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta))$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2\theta) + (\frac{1+\cos(4\theta)}{2}) \right) = \frac{1}{4}\left(3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right).$$

Donc,

$$\iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[81 - 2(3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)) \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[75 - 8\cos(2\theta) - 2\cos(4\theta)) \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[75\theta - 4\sin(2\theta) - \frac{\sin(4\theta)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 75\frac{\pi}{4}. \quad (\mathbf{1.25Pts})$$

Ainsi, $I = \frac{81\pi}{4} + \frac{75\pi}{4} = 39\pi.$ $\quad$ **(0.25 Pt)**
4) On a $J = \iiint_\Delta (a^z + x^2 + y^2)dxdydz$.
On remarque que

$$J = \int_0^1 a^z (Aire(D))dz + \int_0^1 I dz$$

$$= Aire(D)\left[a^z \ln(a) \right]_0^1 + 39\pi = 8\pi(a-1)\ln(a) + 39\pi. \quad (\mathbf{1Pt})$$