Université de Tlemcen. le 06/06/2024

L2 Mathématiques.

Module : Analyse complexe

Epreuve de rattrapage. durée : 1h30

Exercice n° 1

Calculer :

1/ $I = \int_C \mathrm{Re}(z)\,dz$ où C est le cercle unité parcouru dans le sens positif

2/ $J = \int_C z^2\,dz$ où C est la partie de la parabole d'équation $y = x^2$; $0 \leq x \leq 1$

3/ $K = \int_C \bar{z}\,dz$ de $z=0$ à $z = 4+2i$, le long de la courbe C définie par $z = t^2 + it$

Exercice n° 2

Soit f la fonction complexe définie par $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$

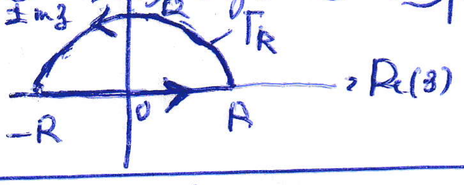
1/ Montrer que $z_m = m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ est un pôle d'ordre 2 de f.

2/ Determiner $\mathrm{Res}(f, m\pi)$ $m \in \mathbb{Z}$

Exercice n° 3

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \pi \,\mathrm{Ln}\, 2$.

(Indication : considérer l'intégrale complexe $\displaystyle\int_C \frac{\log(z^2+i)}{z^2+1}\,dz$ avec C = ce contour



)

Exercice ① : 10pts ; Exercice n° ② : 4pts ; Exercice n° ③ : 6pts

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 06/06/2024

Département de mathématiques

L2 Mathématiques

Module : Analyse complexe

Corrigé de l'épreuve de rattrapage.

Exercice n° 1

Calculer :

1/ $I = \int_C Re(z).dz$ où C est le cercle unité parcouru dans le sens positif

Solution

le cercle C est paramétrisé par :

$\gamma(t) = e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ $\Rightarrow \gamma'(t) = ie^{it}$

$\gamma(t) = \cos t + i\sin t$ $\Rightarrow Re\,\gamma(t) = \cos t$.

$$\Rightarrow I = \int_C Re\,z.dz = \int_0^{2\pi} \cos t . ie^{it}.dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \cos t(\cos t + i\sin t).dt.$$

$$= i\left[\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt + i\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin t}_{u}\,\underbrace{\cos t.dt}_{du}\right]$$

$$= i\left[\int_0^{2\pi}\cos^2 t.dt + i\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^0\right]$$

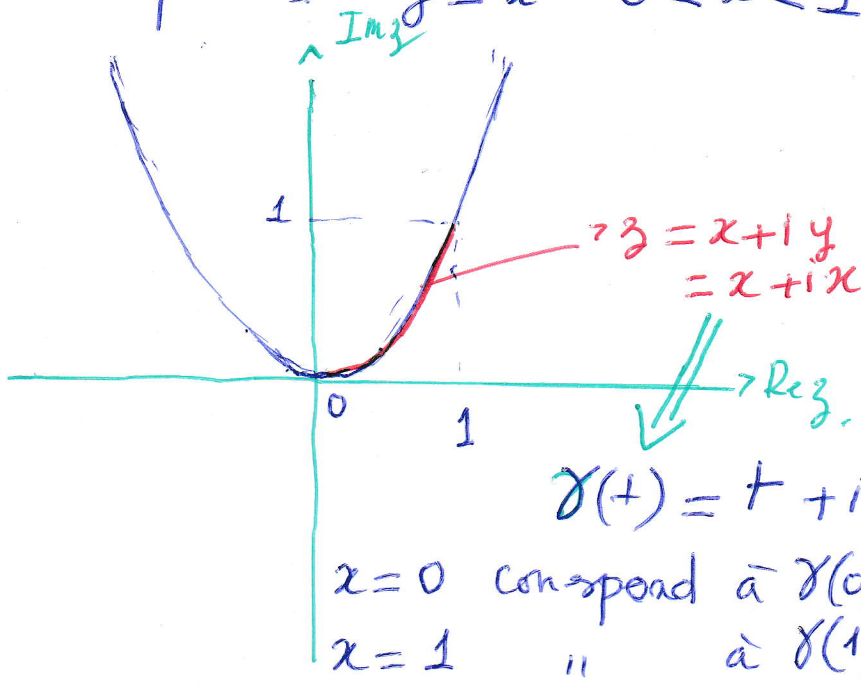
$$= i\int_0^{2\pi}\cos^2 t.dt = i\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t + 1}{2}dt = \frac{i}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow I = \pi i$$

M. Mebkhout

2/ $J = \int_C z^2 dz$ où C est la partie de la parabole d'équation $y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$.

Solution



$\gamma(t) = t + it^2$.

$x = 0$ correspond à $\gamma(0)$.

$x = 1$ " à $\gamma(1)$.

La paramétrisation de la partie de la parabole d'équation $y = x^2 \; 0 \leq x \leq 1$ est

$\gamma(t) = t + it^2. \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \gamma'(t) = 1 + 2it$

$$\Rightarrow J = \int_0^1 (\gamma(t))^2 \gamma'(t).dt.$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(t+it^2)^2}_{u^2} \underbrace{(1+2it)\,dt}_{du} = \int_0^{1+i} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{1+i}$$

$$= \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{1}{3}(1+i)(1+i)^2 = \frac{1}{3}(1+i)(2i)$$

$$\Rightarrow J = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

M. Mebkhout

3/ $K = \int_C \bar{z}\, dz$ de $z=0$ à $z = 4+2i$

le long de la courbe définie par.

$z = t^2 + it$.

Solution : $\gamma(t) = t^2 + it \Rightarrow \gamma'(t) = 2t + i$

$z = 0$ correspond sur C à $t = 0$.

$z = 4+2i$ correspond sur C à $t = 2$

$$\Rightarrow K = \int_0^2 \overline{(t^2+it)}\,(2t+i)\,.dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 - it)(2t+i)\,.dt$$

$$= \int_0^2 (2t^3 + it^2 - 2it^2 + t)\,.dt$$

$$= 2\int_0^2 t^3\,dt - i\int_0^2 t^2\,.dt + \int_0^2 t\,.dt$$

$$= 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 - i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 2.\frac{16}{4} - i.\frac{8}{3} + \frac{4}{2}$$

$$= 10 - i\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow K = 10 - i\frac{8}{3}$$

M. Mebkhout

Exercice n° ②

Soit la fonction complexe définie par :

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}.$$

1/ Montrer que $z_m = m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ est un pôle d'ordre 2 de f.

Solution

Les pôles de f sont les racines de $\sin^2 z$, c'est à dire $z_m = m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ car :

- $\sin m\pi = 0$ $(m \in \mathbb{Z})$
- $\lim\limits_{z \to m\pi} \dfrac{e^z}{\sin^2 z} = \infty$

Ce sont des pôles d'ordre car au dénominateur

on a $\sin^2 z$

2/ Déterminer Res $(f, m\pi)$ $m \in \mathbb{Z}$

Solution

$$\mathrm{Res}(f, m\pi) = \lim_{z \to m\pi} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z-m\pi)^2 \frac{e^z}{\sin^2 z} \right\}$$

$$= \lim_{z \to m\pi} \frac{e^z\left[(z-m\pi)^2 \sin z + 2(z-m\pi)\sin z - 2(z-m\pi)^2 \cos\right.}{\sin^3 z}$$

M. Mebkhout

posons $z - m\pi = u$; $z \to m\pi \Rightarrow u \to 0$

ou $z = u + m\pi$

Ce qui implique que :

$$\mathrm{Res}(f, m\pi) = \lim_{u \to 0} e^{u+m\pi} \left[\frac{u^2 \sin u \cos m\pi + 2u \sin u \cos m\pi - 2u^2 \cos \ldots}{\sin^3 u (\cos m\pi)^3} \right]$$

$$= \lim_{u \to 0} e^{u+m\pi} \left[\frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{\sin^3 u} \right]$$

$= e^{m\pi}$ en utilisant le developpement limite de $\sin u$ et $\cos u$ au voisinage de 0 à l'ordre 3

Conclusion.

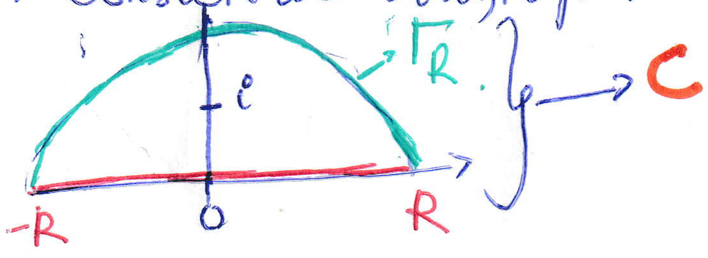
$$\mathrm{Res}(f, m\pi) = e^{m\pi}$$

Exercice n° 3

Demontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \pi \ln 2$

(Indication : Considérer l'intégrale complexe $\displaystyle\int_C \frac{\log(z+i)}{z^2+1}$

où $C =$



Solution.

Les pôles de $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ sont $z_1 = i$ et $z_2 = -i$,

ce sont des pôles simples mais seul $z_1 = i$ est à l'intérieur de C.

M. Mekhal...

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{\log(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\log(2i)}{2i}$$

Th. des résidus $\Longrightarrow$ $$\oint_C \frac{\log(z+i)}{z^2+1} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

$$= 2\pi i \times \frac{\log(2i)}{2i} = \pi \log(2i)$$

$$= \pi \left(\operatorname{Ln}|2i| + i \operatorname{Arg}(2i) \right)$$

$$= \pi \operatorname{Ln} 2 + i \frac{\pi^2}{2}.$$

(en utilisant la détermination principale du logarithme.)

D'autre part en intégrant sur le contour C,

on aura :

$$\oint_C \frac{\log(z+i)}{z^2+1} \, dz = \int_{-R}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} \, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} \, dz$$

$$= \int_{-R}^{0} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} \, dx + \int_{0}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} \, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}$$

En changeant x par $-x$ dans la première intégrale on obtient.

M. Mebkhout

$$\int_0^R \frac{\log(i-x)}{x^2+1}\,dx + \int_0^R \frac{\log(i+x)}{x^2+1}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} = \pi \operatorname{Ln} 2 + i$$

Comme $\log(i-x)+\log(i+x) = \log[(i-x)(i+x)]$

$$= \log(i^2-x^2) = \log(-1-x^2) = \log(-1)(x^2+1)$$

$$= \log(-1) + \log(x^2+1) = \operatorname{Ln}|-1| + i\pi + \log($$

$$= \log(x^2+1) + i\pi$$

on aura.

$$\int_0^R \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + \int_0^R \frac{i\pi}{x^2+1}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz = \pi \operatorname{Ln} 2 +$$

$R \to +\infty$ $\quad$ $R \to +\infty$ $\quad$ $R \to +\infty$ $\quad$ $R \to +$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} + 0 = \pi \operatorname{Ln} 2 + i\frac{\pi^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + i\pi \left[\operatorname{Arctg} x\right]_0^{+\infty} = \pi \operatorname{Ln} 2 + i\frac{\pi^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + i\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \operatorname{Ln} 2 + i\frac{\pi^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \pi \operatorname{Ln} 2$$

1 M. Mehdlaoui